CORSO ELEMENTARE

DI

STUDI MILITARI

COMPILATO

PER ORDINE DEL MINISTERO DELLA GUERRA

TRATTATO

DI

ARITMETICA

ED

ELEMENTI D'ALGEBRA

AD USO

DELLE SCUOLE DELL'ESERCITO

Terza Edizione

TORINO
TIP. SCOLASTICA DI SEBASTIANO FRANCO E FIGLI
1863

PROEMIO

Lo sviluppo ognor maggiore che vanno acquistando le varie Scuole tanto degli Uffiziali quanto dei Sott'uffiziali dell'Esercito ed il desiderio altresì di renderle quanto più si possa proficue, suggerirono al Ministero della guerra la determinazione di somministrare ai varii Corpi una collezione completa di opere elementari, in cui i differenti rami dell'istruzione fossero svolti in modo chiaro, preciso ed uniforme.

Informati a tali principii già videro la luce parecchi trattati, e con analoghi principii pubblicasi in oggi questo sull'Aritmetica e sugli elementi d'Algebra, venendosi così a chiudere la serie delle opere che ragguardano le cognizioni sulle matematiche elementari.

Nella ricerca di un libro di testo, facile e chiaro, si prescelse, siccome per la Geometria, il trattato di Aritmetica e di Algebra del Professore Marta, già in uso nelle varie Scuole dello Stato. Onde, ordinatasene dal Ministero predetto la ristampa, a questa si procedette per cura del Corpo Reale di Stato Maggiore, intro-

ducendovi alcune aggiunte e variazioni indispensabili allo scopo proposto colla compilazione dei varii libri di testo.

Gli elementi d'Aritmetica e di Algebra, di cui si discorre in questo libro, furono messi all'unissono coi trattati di matematiche già pubblicati, dividendo cioè la materia in varii capi e questi in paragrafi, talchè a ciascun capo preceda l'enunciazione sommaria delle materie che si prendono a trattare, e ciascun paragrafo indichi quanto in esso particolarmente si svolge.

Vennero soppressi gli articoli relativi alle misure angolari, perchè di queste trattasi nella Geometria. Ai pochi ragguagli dati dall'Autore tra il nuovo e l'antico sistema di pesi e misure, si sostituirono tabelle comparative assai più estese. Si aggiunsero inoltre le Progressioni, alcune nozioni sui Radicali, e la Teoria dei Logaritmi; si chiuse infine il testo coll'aggiunta di un indice delle varie materie.

Per nulla poi nel rimanente venne mutato nè l'ordine della materia, nè le dimostrazioni, nè le operazioni che tutte si riproducono colle parole stesse dell'Autore.

Nell'adottare frattanto il presente Trattato per le varie Scuole militari, egli è opportuno avvertire:

1° Che per le Scuole degli Uffiziali l'insegnamento debba versare sull'intiera materia;

2° Che per quelle de'Sott'Uffiziali debbansi ommettere i paragrafi relativi alla radice cubica, alle equazioni di 2° grado, ed inoltre i capi VII, VIII e IX.

Torino, addì 1° maggio 1858.

PARTE PRIMA

ELEMENTI DI ARITMETICA

CAPO I.

Nozioni preliminari.

Numero. — Quantità — Unità. — Misura delle quantità: come espressa. — Oggetto dell'Aritmetica. — Numero intero, frazionario e frazione. — Numero astratto e concreto. Numerazione, formazione e nome de' numeri. — Scrittura e lettura de' numeri espressi con cifre. — Cifre significative. — Sistema decimale.

§ 1. Numero.

L' osservazione di più oggetti dotati di qualche proprietà comune, di più individui della medesima specie, fa nascere nell' anima nostra l' idea del *numero*, cioè della riunione di più cose della stessa specie, o di più unità della stessa grandezza.

Più generalmente però il numero è il risultato del paragone di una quantità qualunque colla sua unità.

§ 2. Quantità.

Chiamasi quantità tutto ciò, che è capace di aumento o di diminuzione; ossia tutto ciò di cui può concepirsi il doppio, il triplo, il quadruplo ecc., o la metà, il terzo, il quarto ecc.:

per esempio, le linee, le superficie, i volumi, i tempi, i pesi ecc., sono quantità.

§ 3. Unità.

Dicesi unità una quantità di una specie qualunque, presa, o nella natura o arbitrariamente, come termine di paragone per poter valutare le altre quantità della medesima specie. Così per es., quando si dice cento uomini, si esprime una quantità che ha per unità un uomo; venti trabucchi esprimono una quantità che ha per unità un trabucco.

§ 4. Misura delle quantità.

La misura delle quantità, e le leggi che esse seguono nelle loro variazioni di aumento o di diminuzione si esprimono con numeri; quindi è che la scienza dei numeri, ossia l'*Aritmetica*, dee precedere a qualunque altro studio tendente all'investigazione delle proprietà delle quantità.

§ 5. Oggetto dell'Aritmetica.

L'Aritmetica è la scienza che ha per oggetto di far conoscere le primarie proprietà dei numeri, e le loro diverse composizioni e scomposizioni. Essa ordina e stabilisce metodicamente la nomenclatura de'numeri, e la maniera di scriverli con caratteri particolari, detti *cifre*; ricerca e spiega le regole necessarie per eseguire sopra di essi le quattro operazioni fondamentali del *conteggio*, e mostra l'applicazione di queste regole alla risoluzione delle questioni più semplici, relative ai bisogni della vita civile.

§ 6. Numero intero, frazionario, e frazione.

Un numero qualunque esprime o unità intere, o unità e

parti d' unità, o solamente parti dell'unità: nel primo caso il numero dicesi *intero*, nel secondo *frazionario*, e nel terzo *frazione*.

Così, per esempio, quattro è un numero intero, quattro e due terzi è un numero frazionario, e tre quarti una frazione.

§ 7. Numero astratto e concreto.

Quando, enunciando un numero, non si nomina la specie d'unità alla quale si riferisce, il numero dicesi *astratto*, e quando si nomina la specie dell'unità, si dice *concreto*: così dieci, venti, cento, sono numeri astratti, e dieci anni, venti uomini, cento lire sono numeri concreti. Più numeri concreti si dicono *omogenei*, cioè della medesima specie, quando si riferiscono tutti alla stessa unità; altrimenti si dicono *eterogenei*, cioè di diverse specie.

§ 8. Numerazione, formazione e nomi de' numeri.

La numerazione comprende tre parti: cioè la formazione de' numeri, i nomi de' numeri, e la maniera di scriverli in cifre.

Per formare i numeri si parte dall'unità; l'unità aggiunta a se stessa, ossia ad un'altra unità eguale forma il numero due; se si aggiunge un'altra unità alle due precedenti, si avrà il numero tre: e così continuando di seguito queste successive addizioni dell'unità, si otterrà la serie illimitata de' numeri interi.

I nomi de' numeri s'imparano nella prima età, e si ripetono poi abitualmente senza punto badare alla loro metodica disposizione, mediante la quale tutta la nomenclatura della serie infinita de' numeri si riduce a pochi nomi radicali o semplici. Questa ordinata disposizione de' nomi semplici, fatta per esprimere o nominare tutti i numeri, si chiama sistema di *numerazione parlata*.

Eccone un abbozzo:

Si hanno dieci nomi diversi, dall'uno al dieci. Quest'ultimo numero, cioè la riunione di dieci unità, forma una nuova unità chiamata decina, e che vale dieci volte l'unità prima.

Nella stessa maniera che si conta da un'unità sino a dieci unità, si conta anche da una decina sino a dieci decine; ma per abbreviazione, invece de' nomi composti, una decina, due decine, tre decine . . . . nove decine, dieci decine, si sono sostituiti i nomi dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta, cento.

Per esprimere i nove numeri compresi tra due decine consecutive si fa uso de'nove primi nomi delle unità semplici, che enunciansi successivamente dopo il nome delle decine: così per esprimere i numeri compresi tra due decine e tre decine, ossia tra venti e trenta, si dice ventuno, ventidue, ventitrè . . . . ventotto, ventinove. Nella stessa maniera si enunciano i numeri compresi fra trenta e quaranta, tra quaranta e cinquanta ecc.

I soli sei nomi de' numeri compresi tra dieci e diciassette paiono fare un'eccezione a questa regola; ma la differenza che si osserva nella composizione di questi nomi consiste solamente nell'ordine de'due nomi componenti, e non è punto contraria alla legge di composizione. In vece di nominare prima la decina e poi le unità, come si usa in tutti gli altri nomi composti, si nominano qui prima le unità, quindi la decina; e così si dice undici ossia uno e dieci invece di dieci e uno, dodici ossia due e dieci in vece di dieci e due, tredici in vece di dieci e tre ecc.

Nella stessa maniera che dieci unità semplici formano una nuova unità chiamata decina, dieci decine ne formano una terza chiamata centinaio, o cento: e si conta da un centinaio sino a dieci centinaia; ma invece di dire un centinaio, due centinaia, tre centinaia, ecc., si dice cento, duecento, o dugento, trecento, ecc. Per enunciare i numeri compresi tra due centinaia consecutive si fa uso de' nomi de' novantanove primi numeri,

che si aggiungono ai nomi cento, dugento . . . . novecento.

La riunione di dieci centinaia forma una quarta unità chiamata migliaio o mille. Dieci migliaia fanno una decina di mille; dieci decine di mille fanno un centinaio di mille; e dieci centinaia di mille fanno il milione o mille migliaia.

Dal mille al milione si conta con unità, decine e centinaia di mille, nella stessa maniera che si conta con unità, decine e centinaia semplici dalla prima unità sino al mille.

Partendo dal milione come da una nuova unità si conta con unità di milioni, decine di milioni, centinaia di milioni, migliaia di milioni, decine di mille-milioni, centinaia di mille-milioni.

Dieci centinaia di mille milioni, o sia mille migliaia di milioni fanno il bilione (*).

Dal milione al trilione si conta come dal milione al bilione, cioè per decine, centinaia, migliaia, decine di mille, centinaia di mille bilioni. Seguendo lo stesso metodo si passa dal trilione al quadrilione e cosi di seguito.

In questa maniera con non più di ventiquattro nomi diversi si possono esprimere tutti i numeri, di cui possa l'uomo abbisognare nei diversi usi del commercio e delle scienze.

(*) Fa d'uopo di avvertire qui che i matematici francesi fanno il loro bilione mille volte più piccolo del bilione italiano: perchè considerando questi, che un milione è uguale a mille migliaia, danno il nome di bilione alla collezione di mille milioni, di trilione alla collezione di mille bilioni, e così in seguito. Ma gli antichi Italiani riflettendo che un milione si compone di mille migliaia d'unità, chiamarono bilione la collezione di mille migliaia di milioni, trilione la collezione di mille migliaia di bilioni, e così in avanti. Questa differenza di nomenclatura cadendo sopra numeri quasi di nessuno, o poco frequente uso, non potrà che rarissimamente dar luogo ad equivoco. Tuttavia, per conformarsi all'uso degli antichi Italiani ed essere consentanei coi vocabolari della nostra lingua, si avverte sin d'ora il lettore, che si riterrà l'antica nomenclatura italiana, qui sopra esposta.

§ 9. Scrittura e lettura dei numeri espressi con cifre. Cifre significative. Sistema decimale.

Si passi alla terza parte della numerazione, che ha per iscopo la maniera di scrivere i numeri colle cifre.

Se ciascun numero diverso dovesse esser rappresentato con una cifra particolare diversa da tutte le altre, sarebbe allora necessaria un' infinità di cifre, così che sarebbe impossibile il riconoscerle e ritenerle a memoria.

Si dovette dunque cercare un modo per esprimere qualsivoglia numero coll'uso di pochi segni combinati fra loro secondo regole determinate.

E per riescirvi si è convenuto di scrivere i diversi ordini di unità mentovati di sopra in posti diversi, servendosi però delle stesse cifre per tutti questi ordini.

E siccome in ciascun ordine di unità non si ha bisogno di contare che dall'uno sino al nove, giacchè dieci unità di un ordine qualunque fanno una nuova unità dell'ordine immediatamente superiore; così per esprimere tutte le unità dei diversi ordini basteranno nove cifre; a queste nove cifre se n'aggiunse una decima per marcare la mancanza d'unità di un ordine qualunque.

Riguardo al posto assegnato a ciascun ordine di unità si è convenuto che la prima cifra a destra del numero scritto indichi le unità semplici dall'uno insino al nove: che la seconda cifra situata alla sinistra della prima indichi altrettante decine, quante unità esprimerebbe, se fosse sola; che la terza cifra a sinistra indichi le centinaia; la quarta le migliaia o le unità di mille; la quinta le decine di mille; la sesta le centinaia di mille; la settima i milioni; l'ottava le decine di milioni, e così di seguito. Onde si scorge che una stessa cifra rappresenta valori di dieci in dieci volte maggiori a misura che si avanza da destra verso sinistra; e reciprocamente di dieci in dieci volte minori a misura che retrocede da sinistra verso destra.

Questa ingegnosa convenzione forma la base fondamentale del nostro sistema di numerazione scritta.

In questa maniera tutti i numeri si possono scrivere con la combinazione delle dieci cifre seguenti:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
uno,	due,	tre,	quattro,	cinque,	sei,	sette,	otto,	nove,	zero.

Le prime nove chiamansi *cifre significative;* la decima ha un valore nullo quando è sola; ma combinata con altre cifre indica che mancano le unità dell'ordine, nel cui posto si trova scritta.

Così nella seguente espressione 10, il zero scritto a destra indica che non vi sono unità semplici; la cifra 1 scritta alla sinistra del zero indica, secondo la convenzione sopraccennata, una decina o sia dieci.

Nella stessa maniera le espressioni 20, 30, 40, ecc. indicheranno due decine o sia venti, tre decine o trenta, quattro decine o quaranta, ecc.

L'espressione 37, per esempio, indica tre decine e sette unità, e si legge trentasette.

Se si dovesse scrivere il numero ottantaquattro, cioè otto decine e quattro unità, da quel che precede sarà facile il vedere che si dovrà prima scrivere la cifra 8 per marcare le otto decine, e quindi scrivere a destra dell'8 la cifra 4 per notare le quattro unità; e si avrà così 84.

Il numero novantanove, o nove decine più nove unità, si scriverà 99.

Se al numero 99 si aggiunge un'unità si avrà il numero cento, il quale si scrive così: 100.

Il primo zero a destra marca che non vi sono unità, il secondo a sinistra indica che non vi sono decine, e la cifra 1 scritta al terzo posto a sinistra esprime, secondo la convenzione, un centinaio, o sia cento.

I numeri duecento, trecento, quattrocento, ecc. si scriveranno dunque come segue: 200, 300, 400, ecc.

L'espressione 842 indica 8 centinaia, 4 decine, e 2 unità, e si legge ottocento quarantadue.

Nell'espressione 307 vi sono 3 centinaia con 7 unità, e man-

cano le decine; dunque leggendo si salterà il nome delle decine, e si dirà solamente trecento-sette.

Se fosse proposto (per esempio) di scrivere in cifre il numero trecento cinquantadue, osservando che questo numero è composto di tre centinaia, cinque decine e due unità, si scriverebbe primieramente la cifra 3 per le centinaia, quindi la cifra 5 per le decine, e finalmente a destra del cinque si scriverebbe la cifra 2 per le unità; e si avrebbe così 352 pel numero proposto scritto in cifre.

Il numero novecento novanta nove scritto in cifre sarà 999. Se al numero 999 si aggiunge una unità si avrà il numero mille, il quale si scrive così: 1000; i tre zeri marcano che non vi sono nè unità, nè decine, nè centinaia, e la cifra 1 scritta al quarto ordine a sinistra indica un migliaio o mille.

Sarà facile il vedere che i numeri due mila, tre mila, quattro mila, ecc. si debbono scrivere 2000, 3000, 4000, ecc.

Se oltre alle unità di mille, il numero contenesse altre unità degli ordini inferiori, si scriveranno le cifre che indicano queste unità ai loro luoghi rispettivi, come si è veduto di sopra.

Per esempio, il numero quattromila duecento sessantatre si scriverebbe 4263.

Se si dovesse scrivere il numero tremila e quattro, bisognerebbe osservare che mancano i numeri delle centinaia e delle decine, e scrivere perciò il zero nei due posti corrispondenti a queste denominazioni: altrimenti non si conserverebbe alla cifra 3 il posto necessario per esprimere i mille. Si avrebbe così 3004.

Seguendo la stessa marcia, sarà facile il leggere o esprimere colle parole qualunque numero scritto in cifre; e viceversa, scrivere in cifre qualunque numero pronunziato colle parole.

24,897,321,582,346.

unità.
decine.
centinaia.
mille.
decine di mille.
centinaia di mille.
milioni.
decine di milioni.
centinaia di milioni.
mille-milioni.
decine di mille-milioni.
centinaia di mille-milioni.
bilioni.
decine di bilioni.

Per leggere con facilità un numero qualunque scritto in cifre, bisogna dividerlo, o intenderlo mentalmente diviso, in tanti ternari o caselle di tre cifre ciascuna, cominciando sempre dalla destra. L'ultima casella a sinistra può, secondo i diversi casi, contenere tre cifre, o due, o solamente una. Le tre cifre di ciascuna casella esprimono unità, decine e centinaia; ma colla differenza che queste unità, decine e centinaia sono semplici nella prima casella alla destra, sono di mille nella seconda casella, di milioni nella terza, di mille milioni nella quarta, di bilioni nella quinta, ecc.

Quindi incominciando dalla sinistra, si leggerà successivamente ciascuna casella come se fosse sola, aggiungendovi però alla fine di ciascuna la denominazione corrispondente al posto che occupa.

Per esempio, il numero 203. 005. 304 diviso in caselle come si è detto si leggerà: duecentotre milioni cinque mila trecento quattro.

Ed il numero 28574961, diviso mentalmente in caselle, si leggerebbe ventotto milioni cinquecento setttantaquattro mila novecento sessantuno.

Si è già notato, che la cifra zero non ha per se stessa alcun valore, ma si adopra unicamente per tenere il posto dei diversi ordini d'unità mancanti nel numero enunciato o scritto. Le altre cifre, chiamate significative, hanno due specie di valori, cioè: uno assoluto, l'altro relativo; il valore assoluto è quello, che ha ciascuna cifra considerata sola, cioè separata da tutte le altre; ed il valore relativo è quello, che la cifra acquista dal posto che occupa alla sinistra di altre cifre.

Per iscrivere in cifre un numero qualunque pronunziato colle parole, bisogna prima di tutto badare al numero delle caselle che dovrà contenere il numero proposto, e distinguere a quali caselle corrispondono i diversi nomi pronunziati; quindi incominciando dalla sinistra, cioè dalla casella di maggior valore, si scrivano successivamente le centinaia, le decine e le unità di ciascun ternario, riempiendo col zero i posti delle centinaia, decine e unità che potrebbero mancare.

L'esempio seguente rischiarirà la cosa.

Si debba scrivere in cifre il numero diciassette milioni cinquecento due.

Il nome di milione appartenendo alla terza casella a sinistra, egli è chiaro che il numero proposto dee contenere tre caselle, cioè quella dei milioni, quella de' mille e quella delle unità; di più il nome mille non entrando nell'enunciazione del numero, la casella delle migliaia dovrà riempirsi con tre zeri.

Si scriverà dunque 17 nella casella de' milioni, quindi tre zeri di seguito per la casella de' mille e 502 per quella delle unità; e si avrà così 17000502.

Per distinguere le caselle si lascerà tra di loro un piccolo spazio. In questa maniera si potrà più facilmente riconoscere la giustezza del numero scritto, e si leggerà anche con maggior facilità.

Il sistema di numerazione qui avanti esposto si chiama *sistema decimale*; perchè in questo sistema dieci unità di un ordine qualunque formano una unità dell'ordine immediatamente superiore, e per conseguenza non s'impiegano che dieci cifre per esprimere tutti i numeri. Il numero dieci si chiama la *base* del sistema (*).

(*) In qualunque sistema di numerazione analogo al sistema decimale, la convenzione fondamentale, e la base del sistema, ossia il numero delle cifre, hanno tra loro una reciproca dipendenza, di modo che data l'una risulta immediatamente l'altra. Ma la convenzione fondamentale essendo arbitraria, ne segue che sarà pure arbitrario il numero delle cifre, e che si potrebbero egualmente scrivere tutti i numeri con più o meno di dieci cifre, anche con due sole, purchè fra esse vi entri sempre il zero.

Così volendo, per esempio, scrivere i numeri del sistema della base 12, alle nove cifre significative del sistema decimale bisognerebbe aggiugnerne due altre diverse, cioè una per rappresentare il numero dieci, e l'altra pel numero undici, le quali unitamente al zero farebbero le 12 cifre richieste dal sistema duodecimale. La convenzione fondamentale propria di questo sistema sarebbe, che ciascuna cifra avanzando successivamente di un posto verso sinistra, esprima unità di dodici in dodici volte più grandi; di modo che la prima cifra a destra del numero rappresenterebbe le unità semplici dall'uno all'undici: la seconda cifra verso sinistra esprimerebbe le unità di secondo ordine, che si chiamerebbero dozzine; la cifra nel terzo posto esprimerebbe unità del terzo ordine, cioè dozzine di dozzine, ecc.

CAPO II.

Prime operazioni dell' Aritmetica.

ARTICOLO I.

Addizione dei numeri interi.

Addizione o somma. — Somma dei numeri composti di più cifre. — Regola pratica per l'addizione dei numeri interi. — Verificazione dell'operazione

§ 10. Addizione o somma.

L'addizione è un'operazione, per mezzo della quale si uniscono insieme due o più numeri dati della stessa specie.

Il sistema binario pare il più semplice in riguardo al numero delle cifre, perchè ne richiede solamente due, cioè l'unità col zero, per esprimere tutti i numeri. La convenzione necessaria sarebbe, che l'unità scritta a sinistra di un'altra unità, o del zero, rappresenti un valore doppio di quello che esprime nel posto precedente a destra. Ma nella pratica questo sistema riescirebbe molto incomodo per la continua ripetizione delle sue cifre, e per la troppo lunga scrittura dei numeri un po' grandi; giacchè il numero cento, ad esempio, richiederebbe già una scrittura di sette cifre.

Fra i diversi sistemi possibili, il solo duodecimale potrebbe forse presentare qualche vantaggio a cagione, come si vedrà in seguito, dei quattro divisori della sua base dodici, mentre la base dieci ne ha solamente due. Ma per poter servirsi di questo sistema, bisognerebbe possedere una nomenclatura appropriata alla base dodici; ora la nomenclatura numerica, alla quale siamo abituati, essendo formata sulla base dieci, e radicata nel linguaggio ordinario, per riformarla sopra un'altra base, e sopratutto farla generalmente adottare, s' incontrerebbero difficoltà tali da far rinunziare all'idea di sostituire il sistema duodecimale al decimale. In mancanza di un linguaggio adattato, le considerazioni, che si possono fare sopra qualunque altro sistema diverso dal decimale, sono più curiose, che utili al nostro scopo. Noi pertanto ci limiteremo ad avvertire che la convenzione comune a tutti i sistemi si è, che una cifra posta alla sinistra di un'altra rappresenti unità tante volte più grandi quante sono le unità semplici della base; e che in ciaschedun sistema si possono egualmente fare tutte le operazioni di calcolo, e s' incontrerebbero le stesse proprietà generali dei numeri; ed altre particolari e proprie di ciascun sistema, come avremo occasione di riscontrare in appresso nel volgare nostro sistema decimale.

Il risultato di questa operazione, o sia il numero che eguaglia tutti i numeri dati presi insieme dicesi *somma*. Si debbano sommare i tre numeri 6, 4, 9: per questo basterà aggiungere quattro volte di seguito l'unità al numero 6, che darà 10, quindi aggiungere ancora nove volte di seguito l'unità al numero 10, il che darà 19 per la somma de' tre numeri proposti.

Questa operazione si indica così: $6+4+9=19$, cioè 6 più 4 più 9 è uguale a 19. Il segno $+$ (più) posto fra due numeri, significa che essi vengono considerati come riuniti l'uno all'altro. Il segno $=$ (eguale) posto fra due numeri, indica che essi sono eguali fra di loro.

§ 11. Somma de' numeri composti di più cifre.

Si supponga che i numeri da sommarsi siano composti di molte cifre. Si debbano per esempio sommare insieme i due numeri 516 e 432: in questo caso sarebbe troppo lungo e faticoso l'aggiugnere 432 volte di seguito l'unità al numero 516, come si è praticato nell'esempio precedente. Per ottenerne dunque più speditamente la somma si osservi che sommare insieme 516 e 432 è lo stesso che sommare 5 centinaia del primo colle 4 centinaia del secondo, il che darà 9 centinaia; quindi sommare la decina del primo colle 3 decine del secondo, il che darà 4 decine; e finalmente sommare le 6 unità del primo colle 2 unità del secondo, il che farà 8 unità; onde la somma cercata dovrà contenere 9 centinaia, 4 decine, e 8 unità; cioè sarà 948. Per facilitare l'operazione si scrivono i numeri l'uno sotto l'altro, in maniera che le unità dello stesso ordine siano poste nella stessa colonna, cioè le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia ecc., come si vede qui:

$$\begin{array}{rr} & 516 \\ & 432 \\ \hline \text{somma} & 948. \end{array}$$

Nella stessa maniera si troverà facilmente la somma de' tre

numeri 234, 423, 312; perchè scrivendo questi numeri gli uni sotto gli altri come si è detto, e come si vede qui

	234
	423
	312
somma	969,

in un colpo d'occhio si vedrà che la colonna delle unità darà per somma 9; quella delle decine darà 6; e quella delle centinaia darà 9; onde la somma totale sarà 969.

Nei due esempi precedenti, e in tutti gli altri in cui la somma di ciascuna colonna non è maggiore di 9, è indifferente il cominciar l'operazione a destra, o a sinistra. In generale però sarà più comodo cominciarla a destra. L'esempio seguente farà vedere il perchè.

Si cerchi la somma de' due numeri 348, e 534:

	348
	534
somma	882;

scrivendo i due numeri l'uno sotto l'altro, e sommando a parte ciascuna colonna si troverà 12 nella prima colonna a destra, cioè una decina e 2 unità; si scriverà 2 sotto le unità e si ritiene la decina per unirla a quelle della colonna seguente. Questa colonna darà 7 decine, più una decina ritenuta farà 8 decine: si scriverà 8 sotto le decine. La colonna delle centinaia dando 8 si scriverà 8 sotto le centinaia. La somma sarà dunque 882.

Incominciando l'operazione alla sinistra si scriverebbe 8 centinaia, quindi 7 decine, e poi bisognerebbe correggere cangiando il 7 in 8 per unirvi la decina risultante dalla colonna delle unità. Per togliere quest'inconveniente si comincia l'operazione sempre dalla destra.

Se la somma di qualunque altra colonna fosse anch'essa maggiore di 9, si scomporrebbe pure in decine ed unità; le decine si riterrebbero per unirle alla colonna seguente, e le unità si scriverebbero sotto la colonna sommata.

§ 12. Regola pratica per l'addizione de' numeri interi.

Il ragionamento impiegato negli esempi precedenti potendosi applicare a tutti i numeri, si ricaverà la seguente regola generale.

1° *Si scrivano tutti i numeri proposti gli uni sotto gli altri, ponendo le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia, ed in generale le unità dello stesso ordine in una medesima colonna.*

2° *Si tiri una linea sotto i numeri così scritti, per separarli dalla loro somma, e cominciando dalla prima colonna a destra si faccia la somma delle unità; se questa somma non passa il nove, si scriva la cifra, che la esprime, sotto la colonna delle unità; se è maggiore di nove, si componga questa somma in decine ed unità; si scrivano le unità nella colonna delle unità, e si ritengano mentalmente le decine per aggiugnerle a quelle della colonna seguente. Si prenda nel modo stesso la somma delle decine, quindi quella delle centinaia ecc., e si scrivano le somme parziali sotto le colonne corrispondenti.*

Esempio.

Sommare i numeri 6078, 9198, 483.

$$\begin{array}{rr} & 6078 \\ & 9198 \\ & 483 \\ \hline \text{somma} & 15759 \end{array}$$

cominciando dalle unità si dirà 3 e 8 fanno 11 e 8 fanno 19; si scrive 9 e si ritiene 1:

Passando alle decine si dirà 1 che si è ritenuto e 8 fanno 9 e 9 fanno 18 e 7 fanno 25; si scrive 5 e si ritiene 2:

Nella colonna delle centinaia si dirà 2 che si è ritenuto e 4 fanno 6 e 1 fa 7; si scrive 7:

Nella quarta colonna si dirà 9 e 6 fanno 15; ed essendo questa l'ultima colonna si scriverà 15 tutt'intiero.

La somma sarà dunque 15759.

§ 13. Verificazione dell' operazione.

Per verificare l'operazione si può rifare la somma contando da alto in basso, se la prima volta si è contato da basso in alto, e viceversa. Si può ancora dare ai numeri un'altra disposizione e fare una nuova addizione. Se si operò bene nei due casi, i risultati debbono essere eguali.

Per evitare gli errori bisogna abituarsi a contare con facilità, separare bene le colonne, formare bene le cifre, e non dimenticare di aggiungere alla colonna seguente ciò che si ritenne nella precedente. Ecco alcuni esempi che potranno servire di esercizio:

5783	77756	10376786
4328	3388	789632
5987	9763	589
8521	90257	73
24619	181164	11167080.

ARTICOLO II.

Sottrazione dei numeri intieri.

—

Sottrazione, resto o differenza: minuendo e sottraendo. — Sottrazione dei numeri composti di più cifre. — Caso in cui le cifre del sottraendo siano maggiori delle corrispondenti nel minuendo. — Regola pratica per la sottrazione. — Caso in cui il minuendo contenga molti zeri di seguito. — Verificazione dell'operazione.

—

§ 14. Sottrazione, resto o differenza: minuendo e sottraendo.

La sottrazione è una operazione colla quale si leva un numero minore da un altro maggiore della stessa specie. Il risultato si chiama *resto* o *differenza*, perchè è appunto la parte, per cui il più grande de'due numeri differisce dal più piccolo.

Il numero maggiore si chiama ordinariamente *minuendo*, cioè numero da diminuire; ed il minore si chiama *sottraendo*; cioè numero da sottrarre.

Si voglia per esempio sottrarre il 3 dal 9; per questo basterà levare 3 volte di seguito l'unità dal 9: il risultato sarà visibilmente 6.

In questo caso il 9 è il minuendo, il 3 è il sottraendo, ed il 6 è il resto o la differenza dei due numeri. L'operazione s'indica così: $9-3=6$: cioè 9 meno 3 ossia 9 diminuito di 3 è uguale a 6. Il segno — si pronunzia meno, e quando questo segno è scritto tra due numeri, significa che il numero scritto a destra deve essere sottratto da quello che è scritto a sinistra del segno.

La sottrazione dei numeri di una sola cifra non può arrecare alcuna difficoltà.

§ 15. Sottrazione de'numeri composti di più cifre.

Suppongasi ora che il minuendo ed il sottraendo siano composti di molte cifre.

Si debba per esempio sottrarre il numero 2542 dal numero 4865.

Si scrivano i due numeri l'uno sotto l'altro come se si volessero sommare, ponendo però sempre il minore sotto. Come si vede qui

$$\begin{array}{lr} & 4865 \\ & 2542 \\ \hline \text{resto} & 2323; \end{array}$$

quindi si osservi che se si levano le 2 unità del minore dalle 5 del maggiore, le 4 decine del minore dalle 6 del maggiore, le 5 centinaia del minore dalle 8 del maggiore, le 2 migliaia del minore dalle 4 del maggiore, e che si scrivano sotto ciascuna colonna i resti parziali, si leverà così tutto il numero minore dal maggiore, e la riunione dei resti parziali darà il resto totale.

In questo caso cominciando dalla destra e procedendo verso sinistra si dirà da 5 levando 2 resta 3; si scrive 3 sotto le unità: da 6 levando 4 resta 2; si scrive 2 sotto le decine: da 8 levando 5 resta 3; si scrive 3 sotto le centinaia: da 4 levando 2 resta 2; si scrive 2 sotto le migliaia. Il resto sarà dunque 2323.

In questa maniera la sottrazione totale si scompone in diverse sottrazioni parziali facili ad eseguirsi.

§ 16. Caso in cui le cifre del sottraendo siano maggiori delle corrispondenti nel minuendo.

Può accadere che la cifra inferiore sia maggiore della cifra superiore corrispondente: questo caso deve essere attentamente notato.

Suppongasi per esempio che si voglia sottrarre 258 da 582.

```
        582
        258
resto   324
```

Scritti i due numeri l'uno sotto l'altro come si è di sopra avvertito, si scorge subito non potersi da 2 levare 8; per togliere questa difficoltà si scompongono le 8 decine del numero superiore in 7 decine o 10 unità; queste 10 unità si uniscono colle 2 che si trovano nella prima colonna, e si avranno così sette decine e 12 unità invece di 8 decine e 2 unità. In questa maniera la sottrazione si farà facilmente: perchè nella prima colonna a destra si dirà da 12 levando 8 resta 4; passando alle decine e ricordandosi che la cifra superiore 8 è stata diminuita di 1 si dirà da 7 levando 5 resta 2; e nelle centinaia si dirà da 5 levando 2 resta 3. Il resto cercato sarà 324.

In qualunque colonna s'incontri la difficoltà dell'esempio precedente, si toglierà sempre aumentando di 10 la cifra superiore che rende la sottrazione parziale impossibile, e diminuendo di 1 la cifra superiore che segue immediatamente a sinistra.

Esempio

Sottrarre 4786 da 8342.

```
        8342
        4786
resto   3556.
```

Nella colonna delle unità si dirà da 12 levando 6 resta 6, che si scriverà sotto le unità; nella colonna delle decine il 4 si considera per 3, perchè è stato diminuito di una decina a cagione delle 10 unità portate nella prima colonna; e non potendo dal 3 levar l'8, si aumenterà il 3 di 10 e si dirà da 13 levando 8 resta 5, che si scrive sotto le decine; nella colonna delle centinaia il 3 si considera per 2, perchè è stato diminuito di un centinaio a cagione delle 10 decine portate nella colonna delle decine; e non potendosi fare la sottrazione si aumenterà il 2 di 10, e si dirà da 12 levando 7 resta 5, che si scrive sotto le centinaia; in ultimo nella colonna delle migliaia l'8 si considera per 7, perchè è stato diminuito di un migliaio a cagione delle 10 centinaia portate nella colonna precedente, si dirà dunque da 7 levando 4 resta 3, che si scrive sotto le migliaia. Il resto sarà 3556.

§ 17. Regola pratica per la sottrazione.

Da quel che precede si può ricavare la seguente regola pratica.

Per sottrarre un numero da un altro si scriva il minore sotto il maggiore, ponendo le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia ecc.; si tiri una linea sotto i due numeri per separarli dal risultato: quindi cominciando dalla destra si sottragga ciascuna cifra inferiore dalla sua corrispondente superiore, e si scriva il resto al di sotto. Quando la cifra inferiore è maggiore della cifra superiore corrispondente, si aggiunga mentalmente 10 alla cifra superiore, e si consideri la cifra superiore seguente a sinistra diminuita di un'unità.

In vece di diminuire di una unità la cifra superiore seguente, si può al contrario accrescere di una unità la cifra inferiore; questo modo di calcolare pare anzi più comodo nella pratica. Il risultato è d'altronde sempre lo stesso: infatti sia per esempio 8 la cifra superiore che deve essere diminuita, e sia 5 la cifra inferiore corrispondente, è evidente che si deve

avere lo stesso resto 2; sia levando 5 dal 7, sia levando 6 dall'8.

§ 18. Caso in cui il minuendo contenga molti zeri di seguito.

Si recherà ancora un esempio, che potrebbe imbarazzare i principianti nell'applicazione della regola precedente. Si debba sottrarre 2464 da 4000.

		1
	4000	3999
	2464	2464
resto	1536	1536

per accrescere di dieci unità la prima cifra a destra si deve prendere un'unità sulla cifra seguente a sinistra: e non si può in questo caso per essere la cifra seguente un zero. Non si può dunque prendere un'unità che sulla cifra 4 de' mille. Il mille staccato dal 4 si scompone in 999 più 1; così invece del 4000 si considera il suo equivalente 3999 più 1; unendo l'unità separata colle altre nove si avrà 10 unità invece del primo zero a destra, tutti gli altri zeri sono cangiati in 9, e la cifra significativa 4 viene diminuita d'una unità. Si veda qui sopra la disposizione dell'operazione così scomposta.

Dunque quando il minuendo contiene molti zeri di seguito, nel fare la sottrazione si considera il primo zero a destra come 10, tutti gli altri come 9, e la prima cifra significativa si diminuisce di una unità.

§ 19. Verificazione dell' operazione.

Per far la prova della sottrazione, o sia per verificare il risultato, si somma il resto col sottraendo; la somma risultante dev'essere eguale al minuendo. Questo è evidente, se si considera che il resto non è altro che l'eccesso del minuendo sul sottraendo.

Ecco alcuni esempi di sottrazione:

5003	3000	103034	49812002
4569	1296	69845	18924983
434	1704	33189	30887019

ARTICOLO III.

Moltiplicazione dei numeri interi.

Moltiplicazione: moltiplicando e moltiplicatore, fattori del prodotto — La moltiplicazione è un'addizione abbreviata. — Cinque casi che s'incontrano nella moltiplicazione. — Regola generale per la moltiplicazione. — In ogni moltiplicazione il moltiplicatore è sempre astratto, ed il prodotto è sempre della natura del moltiplicando.

---

§ 20. Moltiplicazione: moltiplicando e moltiplicatore, fattori del prodotto.

La moltiplicazione è una operazione colla quale si ripete un numero tante volte, quante sono le unità contenute in un altro numero.

Il numero che si ripete si chiama *moltiplicando*; il numero che indica quante volte si deve ripetere il moltiplicando, si chiama *moltiplicatore*; ed il risultato dell'operazione, cioè il moltiplicando preso tante volte, quanto viene indicato dal moltiplicatore, si chiama *prodotto*.

Il moltiplicando ed il moltiplicatore si chiamano ancora con un nome comune *fattori del prodotto*.

La moltiplicazione si indica con questo segno $\times$ posto tra il moltiplicando ed il moltiplicatore.

Si può ancora indicare la stessa operazione con un punto posto tra i due fattori. Così le due espressioni $5\times 4=20$, e $5.4=20$ significano ambedue che 5 moltiplicato per 4, o sia 5 preso 4 volte è uguale a 20.

§ 21. La moltiplicazione è un'addizione abbreviata.

Dalla definizione della moltiplicazione si può facilmente scorgere che questa operazione si potrebbe fare col mezzo dell'addizione: in fatti moltiplicare per esempio 12 per 3 essendo la stessa cosa che ripetere 3 volte il 12, è manifesto che per questo basterebbe scrivere il 12 tre volte di seguito, quindi farne l'addizione; la somma 36 sarà il prodotto. Questo modo di operare, che diverrebbe troppo lungo, se si volesse applicare a due numeri composti da molte cifre, si abbreviò col mezzo della moltiplicazione, la quale in origine non è altro che un'addizione abbreviata di numeri eguali.

Ripetendo il 6 quattro volte, oppure il 4 sei volte si ha lo stesso prodotto 24; dunque $6\times4=4\times6$; lo stesso succede in tutti gli altri numeri, ed ha ancora luogo nel caso in cui vi sono più di due numeri da moltiplicare successivamente gli uni per gli altri; dunque in qualsiasi ordine si faccia la moltiplicazione tra diversi fattori, si otterrà sempre lo stesso prodotto.

§ 22. Cinque casi che s'incontrano nella moltiplicazione.

Per rendere ragione di tutti gli accidenti che s'incontrano nella moltiplicazione, prima di esporre la regola generale, si distingueranno i 5 casi seguenti:

1° Moltiplicazione di un numero di una sola cifra per un altro di una sola cifra.

2° Moltiplicazione di un numero di molte cifre per un altro di una sola cifra.

3° Moltiplicazione di un numero qualunque per 10, 100, 1000 ecc., cioè per l'unità seguita da zeri.

4° Moltiplicazione di un numero qualunque per un altro di una sola cifra significativa, seguita da zeri; come sarebbe per 300, per 4000 ecc.

5° Moltiplicazione di un numero qualunque a molte cifre, per un altro qualunque.

Primo caso. Questo caso comprende tutte le moltiplicazioni, che si possono fare tra due qualunque dei nove primi numeri semplici.

I prodotti di queste prime moltiplicazioni essendo poco numerosi, possono e deggiono ritenersi impressi nella memoria: essi trovansi ordinatamente disposti nella tavola seguente attribuita a Pittagora, e detta perciò *Tavola Pittagorica.*

TAVOLA PITTAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Per formare questa tavola si scrivono nella prima linea da sinistra verso destra i nove primi numeri. Nella seconda linea si scrivono i prodotti di ciascuno de' nove primi numeri moltiplicato

per 2; nella terza linea si scrivono i prodotti per 3; e così di seguito fino alla nona linea, che contiene tutti i prodotti per 9. Tutti questi successivi prodotti possono facilmente formarsi per mezzo di somme ripetute.

La maniera di servirsi di questa tavola consiste nel cercare l'uno de'fattori nella prima linea superiore, e l'altro nella prima colonna a sinistra; il prodotto si troverà scritto nella casella d'incontro della colonna che passa pel primo fattore cercato superiormente, colla linea che passa pel secondo fattore cercato a sinistra.

Così si troverà facilmente che il prodotto di 7 per 5 è 35; che quello di 9 per 7 è 63 ecc.

Egli è della massima importanza l'imparar bene a memoria tutti questi prodotti de'numeri semplici, per non esser costretti di ricorrere alla tavola, o di formarli lentamente per mezzo dell'addizione, ogni volta che occorrerà di averne bisogno.

Secondo caso. Per moltiplicare un numero di molte cifre per un altro di una sola, per esempio 2957 per 8, bisogna scrivere il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, come si vede qui:

2957	moltiplicando.
8	moltiplicatore.
23656	prodotto.

Quindi cominciando dalla destra, moltiplicare ciascuna cifra del moltiplicando per quella del moltiplicatore, e scrivere al di sotto le unità di ciascun prodotto parziale, ritenendo le decine per aggiugnerle al prodotto seguente.

In questo esempio si direbbe: otto volte 7 fa 56, si scrive 6 e si ritiene 5; otto volte 5 fa 40 e 5 che si è ritenuto fa 45, si scrive 5 e si ritiene 4; otto volte 9 fa 72, e 4 che si è ritenuto fa 76, si scrive 6 e si ritiene 7; otto volte 2 fa 16 più 7 che si è ritenuto fa 23, si scrive 23 tutt'intiero, perchè è l'ultima colonna: il prodotto sarà 23656.

Per capire la ragione di questa regola si osservi che moltipli-

care 2957 per 8 è la stessa cosa che ripetere otto volte il 2957, e che tutto il numero sarà ripetuto otto volte, ripetendo successivamente otto volte le sue unità, decine, centinaia ecc.; che è appunto quello che si è fatto nella operazione precedente, e che viene indicato dalla regola.

Terzo caso. Per moltiplicare un numero qualunque per 10, 100, 1000 ecc. basterà scrivere alla destra del moltiplicando un zero, 2 zeri, 3 zeri, ecc. vale a dire tanti zeri quanti se ne trovano nel moltiplicatore. Questo risulta manifestamente dal sistema di numerazione: in fatti mettendo un zero alla destra di un numero, tutte le sue cifre si avanzeranno di un posto verso sinistra, e perciò acquisteranno valori dieci volte maggiori; tutto il numero sarà dunque moltiplicato per 10. Mettendo 2 zeri alla destra, ciascuna cifra s'avanzerà di 2 posti a sinistra, ed acquisterà un valore cento volte maggiore; il numero sarà dunque moltiplicato per 100 ecc., onde 436 moltiplicato per 10 darà al prodotto 4360, e 24 moltiplicato per 100 darà 2400 ecc.

Quarto caso. Moltiplicare un numero qualunque per un altro di una sola cifra significativa seguitata da zeri, per esempio, 24 per 300.

Si moltiplicherà il primo numero per la cifra significativa del secondo, e si scriveranno a destra del prodotto tutti i zeri del secondo numero. Nell'esempio addotto si moltiplicherà 24 per 3, il che darà 72; quindi si aggiungeranno a destra del 72 i due zeri del moltiplicatore, e si avrà 7200 pel prodotto di 24 per 300.

Questo diverrà chiaro se si osserva, che moltiplicare 24 per 300 è lo stesso che ripetere 300 volte il 24, ossia ripeterlo 3 volte, e quindi prendere ancora 100 volte il risultato. Lo stesso ragionamento si applica cogli altri casi simili.

Quinto caso. Moltiplicare un numero qualunque di molte cifre per un altro qualunque di molte cifre; per esempio, 2327 per 532.

Per ciò fare si sa che bisogna prendere 532 volte il numero 2327, il che si otterrà ripetendo il numero 2327 prima

2 volte, poi 30 volte, quindi 500 volte, e riunendo insieme i tre prodotti parziali. In questa maniera la moltiplicazione dei due numeri si troverà scomposta in tre moltiplicazioni parziali, che si sa effettuare (*caso secondo e quarto*).

L'operazione si dispone come segue:

2327	moltiplicando		
532	moltiplicatore.		
4654	prodotto parziale	per	2.
69810	id.	per	30.
1163500	id.	per	500.
1237964	prodotto totale.		

Nella pratica di questa operazione si può tralasciare di scrivere i zeri alla destra de' prodotti parziali per le decine e centinaia del moltiplicatore, secondo la regola del caso quarto; ma bisogna ricordarsi di lasciare vuoti i posti di certi zeri, trasportando perciò in dietro verso sinistra la prima cifra di ciascun prodotto parziale sotto la cifra del moltiplicatore, per la quale si fa il prodotto parziale.

§ 23. Regola generale per la moltiplicazione.

L'esempio precedente facendo vedere come debbasi operare negli altri casi, si può stabilire per regola generale della moltiplicazione la seguente:

Per moltiplicare un numero di molte cifre per un altro anche di molte cifre, si scriverà il moltiplicatore sotto il moltiplicando, quindi si moltiplicherà tutto il moltiplicando successivamente per le unità, decine, centinaia ecc. del moltiplicatore, e si scriverà la prima cifra di ciascun prodotto parziale sotto la cifra del moltiplicatore, per la quale si moltiplica: in ultimo si farà la somma di tutti i prodotti parziali, e si avrà così il prodotto totale.

Se si trovassero de' zeri fra le cifre del moltiplicatore, non

si fa alcuna moltiplicazione per questi zeri; perchè i prodotti parziali che ne risulterebbero, sarebbero composti di una serie di zeri senza valore.

Ma se i zeri si trovano fra le cifre del moltiplicando, allora non si possono saltare, e si deve operare sopra questi, come sulle altre cifre, scrivendo zero al prodotto, se niente siasi ritenuto dalla moltiplicazione precedente.

Esempio.

Moltiplicare 40036 per 6004.

Operazione.

```
    40036
     6004
  -------
   160144   prodotto parziale per 4.
240216           id.        per 6000.
---------
240376144   prodotto totale.
```

Se il moltiplicando, o il moltiplicatore, o ambedue sono terminati da uno o più zeri, si farà la moltiplicazione sulle sole cifre significative, e si scriveranno alla destra del prodotto tutti i zeri dell'uno e dell'altro fattore.

Così per moltiplicare 3600 per 250, si moltiplicherà solamente 36 per 25, ed alla destra del prodotto 900 si scriveranno i tre zeri de' due fattori: il prodotto totale sarà così 900000.

Col mezzo delle regole precedenti si potrà facilmente fare una moltiplicazione qualunque. Siccome importa moltissimo l'esercitarsi alla pratica di queste operazioni, si addurrà ancora alcuni esempi che potranno servire di esercizio:

526	9648	53687
307	5137	908
3682	67536	429496
1578	28944	483183
161482	9648	48747796.
	48240	
	49561776.	

§ 24. In ogni moltiplicazione il moltiplicatore è sempre astratto, ed il prodotto è sempre della natura del moltiplicando.

In ogni moltiplicazione il prodotto è sempre della stessa natura del moltiplicando; giacchè il prodotto non è altro che il moltiplicando ripetuto un certo numero di volte.

Il moltiplicando può essere astratto o concreto.

Il moltiplicatore è sempre astratto, poichè indica solamente quante volte si debba ripetere il moltiplicando.

Quindi il prodotto di una moltiplicazione conterrà tante volte il moltiplicando, quante sono le unità del moltiplicatore.

E moltiplicare un numero per un altro significherà generalmente formare col moltiplicando un terzo numero chiamato prodotto, nella stessa maniera che il moltiplicatore è formato coll'unità. Nelle applicazioni si ha soventi volte bisogno di moltiplicare successivamente più numeri tra di loro. Siano, per esempio, i numeri 6, 8, 12, 15 da moltiplicarsi insieme: per formare il prodotto di questi numeri nell'ordine in cui sono scritti, si moltiplicherà prima 6 per 8, quindi si moltiplicherà il prodotto dei due primi per 12, poi questo secondo prodotto si moltiplicherà per 15, il che darà 8640 pel prodotto dimandato.

Si potrebbe, con questi quattro fattori, ottenere lo stesso prodotto in molte altre maniere, variando cioè l'origine delle moltiplicazioni successive: e questo si esprime dicendo che *un pro-*

dotto qualunque non si cangia col variare l'ordine dei suoi fattori (§ 21). Questa verità suole ordinariamente dimostrarsi: per due soli fattori la si considera come una verità intuitiva; e per più fattori si osserva che si può alternare il prodotto dei due primi fattori col terzo fattore senza cangiare il secondo prodotto, e così di seguito; del resto l'analogia e la pratica rendono il principio evidente. Quindi risulta un modo facile di far la prova della moltiplicazione: per questo basterà cangiar l'ordine dei due fattori, e rifare la moltiplicazione; questo secondo prodotto non può esser diverso dal primo.

ARTICOLO IV.

Divisione de' numeri interi.

Divisione: dividendo, divisore e quoziente — Come l'operazione della divisione possa eseguirsi colla sottrazione — Il divisore moltiplicato pel quoziente deve riprodurre il dividendo — Tre casi che s'incontrano nella divisione, e regola pratica per effettuar l'operazione — Verificazione dell'operazione — Applicazione della moltiplicazione e della divisione alla soluzione di alcuni quesiti.

---

§ 25. Divisione; dividendo, divisore e quoziente.

La divisione è un'operazione, colla quale si cerca quante volte un numero è contenuto in un altro.

Questa operazione si chiama divisione, perchè serve a dividere un numero in parti uguali.

In fatti per dividere, per esempio, 40 in 8 parti eguali, si cerca quante volte 8 è contenuto nel 40, e trovando esservi contenuto 5 volte, si conchiude che 5 è il valore di una delle 8 parti eguali, da cui è composto il 40.

Il numero che si divide, si chiama *dividendo*; quello pel quale si divide si chiama *divisore*; ed il risultato dell'operazione, ossia il numero che esprime quante volte il divisore è contenuto nel dividendo, si chiama *quoto* o *quoziente*, dal latino *quoties*, che significa quante volte.

Si nota che la stessa operazione può avere due oggetti diversi: così si può dimandare per esempio di dividere 40 in 8 parti eguali; in questo caso il quoziente 5 indica il valore di una delle otto parti; ma si può anche dimandare di dividere 40 in parti eguali a 8, ed allora il quoziente 5 indica il numero delle parti.

Qualunque sia lo scopo che si prefigge, la divisione si fa sempre cercando quante volte il divisore è contenuto nel divi-

dendo; e le condizioni della questione determinano la natura del quoziente.

La divisione si nota con due punti posti l'uno sopra l'altro tra il dividendo ed il divisore, oppure mettendo il dividendo sopra il divisore, e separandoli con una linea; così le due espressioni 27:3, e $\frac{27}{3}$ significano ambedue la divisione di 27 per 3, e si leggono tutte e due 27 diviso per 3.

§ 26. Come l'operazione della divisione possa eseguirsi colla sottrazione.

Nella stessa maniera che la moltiplicazione si può fare col mezzo dell'addizione (§ 21), la divisione si potrebbe eseguire col mezzo della sottrazione. In fatti per cercare quante volte un numero è contenuto in un altro, basterebbe sottrarre successivamente il primo dal secondo tante volte, quante può esserne sottratto; il numero delle sottrazioni possibili darebbe il quoziente. Ma se il dividendo contenesse un gran numero di volte il divisore, l'operazione fatta per sottrazione sarebbe troppo lunga; si cercò dunque di abbreviarla, come si vedrà in seguito.

§ 27. Il divisore moltiplicato pel quoziente deve riprodurre il dividendo.

Siccome il dividendo contiene il divisore tante volte, quante sono le unità del quoziente, si può riguardare il dividendo come un prodotto, il divisore ed il quoziente come i suoi due fattori e la divisione stessa come una operazione, col mezzo della quale essendo dato un prodotto, ed uno dei suoi fattori, si cerca l'altro fattore. Dunque il divisore moltiplicato pel quoziente dee riprodurre il dividendo. Questa proprietà del divisore e del quoziente porge il mezzo di verificare il risultato della divisione.

§ 28. Tre casi che s'incontrano nella divisione: regola pratica per effettuare l'operazione.

Per maggior chiarezza si distinguono tre casi di divisione, cioè:

Primo. Divisione di un numero di una, o due cifre per un numero di una cifra, dovendo il quoziente avere una sola cifra.

Secondo. Divisione di un numero di molte cifre per un numero di una cifra.

Terzo. Divisione di un numero di molte cifre per un altro anche di molte cifre.

Primo caso. Dividere un numero di una o di due cifre per un altro di una cifra, dovendo il quoziente avere una sola cifra. Queste divisioni sono in piccolo numero, ed i loro quozienti, qualora non si sappiano a memoria, si trovano nella tavola pittagorica. Per trovare coll'aiuto di questa tavola il quoziente di 56 diviso per 8, per es., si cerchi il divisore 8 nella prima linea superiore, si discenda per la colonna dell'8, sicchè si trovi il dividendo 56, quindi si proceda verso sinistra per la linea che passa pel 56, e si troverà nella prima colonna il quoziente 7.

Se il dividendo non si trova esattamente nella tavola, bisogna fermarsi al numero immediatamente minore che trovasi nella colonna partendo dal divisore; il quoziente che si prende nel modo spiegato non è esatto, ma soltanto il più prossimo. Per esempio se si volesse dividere 58 per 8, si troverebbe 56 pel numero minore più prossimo al dividendo 58 e il quoziente sarebbe 7 col residuo 2. Si vedrà a suo tempo ciò che si dee fare di questo resto.

Per fare con facilità una divisione qualunque, bisogna sapere a memoria tutti i quozienti di questo genere; conviene dunque esercitarsi molto per trovarli immediatamente senza fatica, e senza avere bisogno di ricorrere alla tavola. Da questo si scorge ancora la necessità di rendersi famigliare la tavola pittagorica; perchè sapendosi, per esempio, che 7 moltiplicato per 9 dà 63,

si troverà subito a memoria che 63 diviso per 9 deve dare 7, e che 63 diviso per 7 deve dare 9 al quoziente.

Secondo caso. Dividere un numero di molte cifre per un altro di una sola : per esempio 364 per 7.

Disposizione dell'operazione.

Dividendo	364	7	divisore
	35	52	quoziente.
	14		
	14		
	00		

Regola. Si scriva il divisore alla destra del dividendo separandoli con una linea d'alto in basso : si tiri una linea sotto il divisore per separarlo dal quoziente : quindi cominciando dalla sinistra si considerino le due prime cifre del dividendo, perchè la prima sola non basta per contenere il divisore 7; e si dica il 7 in 36 è contenuto 5 volte: si scriva 5 sotto il divisore al luogo destinato al quoziente; per verificare questa prima cifra 5 del quoziente si moltiplicherà pel divisore 7, ed il prodotto 35 si sottrarrà dal dividendo parziale 36, resterà visibilmente 1; a destra di questo resto 1 si abbassi la seguente cifra 4 del dividendo, e si avrà un nuovo dividendo parziale 14, sul quale si opererà come sul primo 36 : si dirà dunque il 7 in 14 è contenuto 2 volte: si scriverà 2 al quoziente alla destra del 5; si moltiplicherà il divisore 7 pel quoziente parziale 2, ed il prodotto 14 si sottrarrà dal secondo divisore parziale 14, il resto essendo zero, il quoziente completo sarà 52. Se il dividendo avesse un maggior numero di cifre, si continuerebbe nella stessa maniera.

Spiegazione. Per capire questa regola si osservi, che se un numero ne contiene un altro un dato numero di volte, il decuplo del primo numero conterrà il secondo un numero di volte decuplo di quello di prima; medesimamente il centuplo del primo

numero conterrà il secondo un numero di volte centuplo di quello di prima, e così di seguito.

Così, per esempio, il 15 contenendo il 3 cinque volte, 15 decine ossia 150 conterrà il 3 cinque decine di volte ossia 50 volte; perchè il 150 essendo formato da 10 parti eguali a 15, e ciascuna di queste parti contenendo il 3 cinque volte, è chiaro che la riunione delle 10 parti dovrà contenere il 3 dieci volte cinque, ossia 50 volte. Collo stesso ragionamento si proverebbe che 1500 centuplo di 15, contiene il 3 cinque centinaia di volte, ossia 500 volte, e che 15000 lo contiene 5000 volte, ecc.

Ripigliando l'esempio precedente colla scorta di questa osservazione, si vedrà subito che il divisore 7 è contenuto nelle 36 decine del dividendo, 5 decine di volte, con una decina di avanzo; questa decina unita colle 4 unità farà 14 unità, ed il 7 in 14 essendo contenuto 2 volte, ne segue che il divisore 7 sarà contenuto 52 volte in tutto il dividendo 364.

Con questo metodo si scompone il dividendo totale 364 in due dividendi parziali che sono 35 decine e 14 unità, dei quali il primo contiene il divisore 50 volte, ed il secondo lo contiene 2 volte.

Sarà ora facile il dividere un numero qualunque per un altro di una sola cifra, per esempio 3616 per 8.

3616	8
32	452
41	
40	
16	
16	
00.	

La prima cifra non potendo contenere il divisore, si prendono le due prime cifre alla sinistra del dividendo, e si dice 8 in 36 è contenuto 4 volte; si scrive 4 al quoziente, che saranno visibilmente

4 centinaia, giacchè si ha al dividendo 36 centinaia; e per riconoscere più sicuramente l'avanzo, si moltiplica il quoziente 4 pel divisore 8, e sottraendo il prodotto 32 dal dividendo parziale 36 si ottiene pel resto 4; a lato di questo resto si abbassa la cifra seguente 1 del dividendo, e si dice 8 in 41 è contenuto 5 volte, si scrive 5 al quoziente, che saranno 5 decine, poichè il dividendo parziale è 41 decine; moltiplicando 5 per 8, e sottraendo il prodotto 40 dal 41, si ottiene 1 di resto; accanto del resto 1 si abbassa l'ultima cifra 6 del dividendo, e si dice 8 in 16 è contenuto 2 volte, si scrive 2 alle unità del quoziente; moltiplicando 2 per 8 e sottraendo il prodotto dal 16 resta zero; il quoziente totale sarà dunque 452.

Se qualcheduno dei dividendi parziali non contenesse il divisore, si scriverebbe zero al quoziente; si abbasserebbe quindi a destra di questo dividendo parziale un'altra cifra, e si continuerebbe la divisione.

L'esempio seguente si riferisce a questo caso.

Dividere 2856 per 7.

2856	7
28	408
056	
56	
00	

il 7 in 28 è contenuto 4 volte senza alcun avanzo, si scrive 4 al quoziente, e si abbassa il 5; il 7 in 5 non essendo contenuto, si scrive zero al quoziente, e si abbassa accanto del 5 l'ultima cifra 6 del dividendo; il 7 in 56 è contenuto 8 volte, si scrive 8 al quoziente; il quoziente totale sarà dunque 408.

Se il dividendo è terminato da zeri, si opera su questi zeri come sulle altre cifre, cioè si abbassano successivamente a lato dei resti. Si veda l'esempio qui contro della divisione di 2900 per 4.

```
2900 | 4
28   |----
---- | 725
 10
  8
 ---
 20
 20
 ---
 00.
```

Quando in questo caso le cifre significative del dividendo contengono esattamente il divisore senza alcun avanzo, allora si fa la divisione solamente su queste cifre, e si scrivono a destra del quoziente ottenuto tutti i zeri del dividendo; così per dividere 36000 per 9, si divide 36 per 9, il che dà 4 al quoziente, quindi si scriveranno a destra del 4 i tre zeri; il quoziente sarà così 4000. In queste divisioni facili, invece di scrivere i successivi resti, si ritengono a memoria e si scrive il quoziente immediatamente sotto al dividendo.

Terzo caso. Dividere un numero di molte cifre per un altro anche di molte cifre; per esempio, dividere 57981 per 251.

Regola. Si scrivano il dividendo ed il divisore come si è detto superiormente e come si vede qui accanto, si separinó alla sinistra del dividendo tante cifre, che possano contenere il divisore considerandole come rappresentanti unità semplici; in questo esempio basterà separare le tre prime 579; quindi si cerchi quante volte il divisore 251 è contenuto in 579, e si troverà esservi contenuto 2 volte con un resto, si scrive 2 al quoziente, e per riconoscere il resto si moltiplica il quoziente 2 pel divisore 251, e si sottrae il prodotto dal dividendo parziale 579; a destra del resto 77 si abbassa la cifra seguente 8 del dividendo totale, e si avrà un secondo dividendo parziale 778, sul quale si opererà come sopra il primo, scrivendo la seconda cifra del quoziente a destra della prima già trovata, e così di seguito.

```
57981 | 251
502   |-----
----- | 231
 778
 753
 ---
  251
  251
  ---
  000
```

Siccome non si può facilmente vedere al primo colpo d'occhio quante volte il divisore sia contenuto in ciascun dividendo parziale, si faciliterà questa ricerca nella maniera seguente: per esempio, per sapere quante volte il 251 sia contenuto nel secondo dividendo parziale 778, si dirà il 2 in 7 è contenuto 3 volte con 1 di avanzo; quest'avanzo 1 unito alla cifra seguente 7 fa 17, il 5 in 17 è pure contenuto 3 volte con 2 di resto, il qual resto unito all'ultima cifra 8 fa 28, e l'ultima cifra del divisore essendo anche contenuta 3 volte in 28, si è sicuri che tutto il divisore 251 è contenuto 3 volte nel 778; allora si può scrivere con sicurezza il 3 al quoziente.

Spiegazione. Applicando le osservazioni sopra citate all'esempio proposto si vedrà subito che il primo dividendo parziale essendo 579 centinaia, il quoziente 2 esprimerà 2 centinaia; il secondo dividendo parziale essendo 778 decine, il quoziente 3 indicherà 3 decine; il terzo dividendo parziale essendo 251 unità, il quoziente 1 sarà una unità; il quoziente totale sarà dunque 231.

Se si fosse potuto scomporre il dividendo 57981 in 502 centinaia, più 753 decine, più 251 unità, si sarebbe facilmente veduto che la prima parte contiene il divisore 200 volte, la seconda 30 volte, e la terza una volta, e che per conseguenza la riunione delle tre parti, cioè il dividendo totale 57981, deve contenere il divisore 231 volte.

Ora con la regola esposta si viene appunto a fare questa scomposizione: infatti si osservi che le tre parti accennate del dividendo sono appunto i prodotti parziali di ciascuna cifra del quoziente per il divisore, e che queste parti si tolgono successivamente dal dividendo totale a misura che si conoscono le rispettive cifre del quoziente.

Altro esempio.

Dividere 423405 per 485.

Operazione.

Dividendo	423405	485	divisore
	3880	873	quoziente.
	3540		
	3395		
	1455		
	1455		
	0000		

si prendono 4 cifre a sinistra del dividendo, perchè 3 non bastano per contenere il divisore; quindi si cerca quante volte il divisore 485 è contenuto nel dividendo parziale 4234; per questo si dirà il 4 in 42 è contenuto 10 volte, ma il 10 è troppo forte, perchè in ciascuna divisione parziale non si dee avere che una sola cifra al quoziente, ed è altronde visibile che 10 moltiplicato per 485 darebbe un prodotto più grande del dividendo parziale 4234: dunque invece di 10 si dirà 9 volte con 6 di resto, perchè 9 volte 4 fa solamente 36; aggiungendo il resto 6 col 3 susseguente si avrà 63, e l'8 in 63 non essendo contenuto 9 volte, nemmeno 9 sarà buono al quoziente: diminuendo ancora di una unità si dirà il 4 nel 42 è contenuto 8 volte con 10 di avanzo; quest'avanzo unito al 3 dà 103; la seconda cifra 8 del divisore entra nel 103 anche 8 volte, con un resto così grande, che aggiunto col 4 ultima cifra del dividendo parziale, contiene anche 8 volte l'ultima cifra 5 del divisore. Si scriverà dunque 8 al quoziente. Moltiplicando il quoziente 8 pel divisore 485 e scrivendo il prodotto 3880 sotto il dividendo parziale 4234, si farà la sottrazione; a destra del resto 354 si abbasserà lo zero, e si cercherà

quante volte 485 è contenuto nel 3540; seguendo il metodo indicato si troverà 7 volte; si scriverà dunque 7 al quoziente; moltiplicando 7 pel divisore, e sottraendo il prodotto dal dividendo parziale 3540 resterà 145, a lato di questo resto si abbasserà l'ultima cifra 5 dal dividendo, e facendo la divisione del 1455 per 485 si troverà 3 al quoziente senza alcun resto. Il quoziente totale sarà dunque 873.

Per abbreviare l'operazione, invece di scrivere sotto ciascun dividendo parziale il prodotto del divisore pel quoziente parziale corrispondente, si farà la sottrazione a misura che si moltiplica ciascuna cifra del divisore pel quoziente parziale, e si scriverà solamente il resto sotto il dividendo parziale. Un esempio basterà per mettere in chiaro questo modo di calcolare.

Supponghasi che si voglia dividere 1755 per 39.

1755	39
195	45
00.	

Dividendo 175 per 39, il quoziente è 4; moltiplicando 39 per 4, si dirà 4 volte 9 fanno 36; ma non potendosi sottrarre 36 dal 5, si prenderanno 4 unità dalla colonna seguente, e sottraendo 36 da 45, si scriverà il resto 9 sotto il 5, e si riterrà 4 per aggiungerlo al numero che si dovrà sottrarre dalla colonna seguente; quindi si dirà 4 volte 3 fanno 12, e 4 che si è ritenuto fanno 16; sottraendo 16 da 17 resta 1; il resto totale sarà dunque 19. Questo semplice ripiego renderà la pratica della divisione più spedita. Ma questo spediente non dee usarsi dai principianti.

Ecco alcuni esempi che potranno servire di esercizio.

```
16512 | 344          3049164 | 6274
2752  |----          53956   |-----
0000  | 48            37644  | 486
                      00000

        48747796 | 53687
          429496 |------
          000000 | 908
```

§ 29. Verificazione dell'operazione.

Per verificare la divisione si moltiplica il quoziente pel divisore; il prodotto deve essere eguale al dividendo, e quando vi è un resto finale, che non può più dividersi pel divisore, allora al prodotto del quoziente pel divisore si deve aggiugnere il resto finale, perchè il risultato diventi eguale al dividendo.

Ciascun resto è sempre più piccolo del divisore; un resto più grande del divisore significa che il quoziente è troppo piccolo; bisognerà dunque aumentarlo convenientemente; quando il prodotto del quoziente pel divisore è più grande del dividendo parziale, allora il quoziente è troppo grande, bisognerà dunque diminuirlo convenientemente.

Ciascuna cifra che si abbassa a destra del resto, dà una cifra al quoziente; sarà dunque facile di determinare preventivamente il numero delle cifre del quoziente.

Si può moltiplicare il dividendo ed il divisore per uno stesso numero, senza cangiare il quoziente; si può anche dividere l'uno e l'altro per uno stesso numero. Dunque se il dividendo ed il divisore sono terminati da zeri, si può levarne da ciascuno un egual numero.

§ 30. Applicazione della moltiplicazione e della divisione alla soluzione di alcuni quesiti.

La moltiplicazione serve a trovare il valore di un determinato numero di cose, o unità eguali, quando si conosce il valore di una di queste unità. Essa serve ancora a convertire un numero qualunque di unità di una data specie in altre unità minori, conoscendo il rapporto tra l' unità maggiore e la minore. Per esempio, a convertire giorni in ore, e questi in minuti: lire in soldi, e questi in denari: trabucchi in piedi, e questi in once ecc.

La divisione al contrario serve a trovare il valore dell' unità, quando si conosce il valore di un dato numero di queste unità: essa serve ancora a convertire un dato numero di unità minori in altre unità maggiori: per esempio a convertire minuti in ore, ed ore in giorni: denari in soldi, e soldi in lire: once in libbre, e libbre in rubbi ecc.

Ecco alcuni quesiti.

Quesito primo. *Si domanda il prezzo di 1283 trabucchi di una data opera, supponendo che un trabucco costi 47 lire.*

Ognuno vede che per avere il prezzo totale, bisognerà ripetere il prezzo di un trabucco tante volte, quanti sono i trabucchi: si dovrà dunque moltiplicare 47 lire per 1283, o piuttosto per maggior facilità 1283 per 47; il prodotto risultante 60301 esprimerà in lire il prezzo dimandato.

Quesito secondo. *Un trabucco di una data opera, per esempio, di muro costa 39 lire, quanti trabucchi si faranno costruire con 9633 lire?*

Posto che con 39 ll. si ha un trabucco di opera, è manifesto che con due volte 39 ll. si avranno due trabucchi, e con tre volte 39 lire, tre trabucchi ecc.

Dunque il numero dei trabucchi di opera dimandato sarà eguale al numero di volte che il 39 è contenuto nel 9633; onde basterà dividere 9633 per 39, ed il quoziente risultante 247 indicherà il numero ricercato dei trabucchi di muro.

Quesito terzo. *Si pagarono* 8917 *lire pel prezzo di* 482 *rasi di panno; si dimanda il prezzo di un raso di questo panno.*

È manifesto che il prezzo totale pagato proviene dal prezzo di un raso ripetuto 482 volte: dunque dividendo 8917 lire per 482, il quoziente sarà il prezzo di un raso.

$$\begin{array}{l|l} 8917 & 482 \\ \cline{2-2} 4097 & 18+\frac{241}{482} \\ \ \ 241 & \end{array}$$

facendo la divisione si troverà per quoziente intero 18 lire con un residuo finale 241, che si scriverà a destra del quoziente intero col divisore di sotto.

Si vedrà qui appresso il modo di valutare queste espressioni, che rappresentano valori minori dell'unità, e che si chiamano perciò frazioni: per ora si osserverà solamente che le 241 lire residue moltiplicate per 20 danno 4820 soldi, che divisi per 482 daranno 10 soldi per quoziente. Dunque il prezzo di un raso del dato panno sarà di lire 18 e soldi 10.

CAPO III.

Proprietà relative alla divisibilità de' numeri.

Multiplo, sotto-multiplo, fattore, divisore o parte aliquota. Numero primo. Numeri primi tra loro — Alcuni principii sulla divisibilità dei numeri. — Divisibilità dei numeri per 2, per 5, per 4 o 25, per 8 o 125, per 3 o 9, e per 11. — Ricerca dei divisori di un numero.

---

§ 31. Multiplo, sotto-multiplo, fattore, divisore o parte aliquota. Numero primo. Numeri primi tra loro.

Quando un numero intero è esattamente divisibile per un altro numero intero, il primo numero si dice *multiplo* del secondo; ed il secondo si chiama *sotto-multiplo*, *fattore*, *divisore*, o *parte aliquota* del primo. Così 24 è un multiplo di 6 e di 4; reciprocamente 4 e 6 sono divisori, sotto-multipli, o parti aliquote di 24. Medesimamente 60 è un multiplo di 12 e di 5, vicendevolmente 5 e 12 sono divisori, o sotto-multipli di 60. Si chiama *numero primo* qualunque numero, che non è esattamente divisibile per alcun altro numero, fuorchè per se stesso e per l'unità. Così 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ecc. sono numeri primi.

Due numeri che non hanno alcun divisore comune, fuorchè l'unità (che è divisore di tutti i numeri), si dicono *numeri primi tra loro*: così 14 e 15 sono numeri primi tra loro, quantunque abbiano l'uno e l'altro due divisori: perchè i due divisori del primo non dividono il secondo, ed i divisori del secondo non dividono il primo.

§ 32. Alcuni principii sulla divisibilità dei numeri.

Si premettono qui alcuni principii, che riceveranno subito la loro applicazione.

1° *Un numero che divide esattamente un altro numero, dividerà anche esattamente qualunque multiplo di questo secondo numero.*

Per esempio, il numero 8 che divide il 24, e dà per quoziente 3, dividerà pure manifestamente cinque volte 24, ossia 120, e darà per quoziente cinque volte 3, o 15.

2° *Qualunque numero scomposto in due parti, ambedue separatamente divisibili per un secondo numero intero, sarà egli stesso esattamente divisibile per questo secondo numero.*

Così per esempio il numero 111 essendo eguale alla somma di 90+21, e queste due parti essendo visibilmente l'una e l'altra divisibili per 3, si conchiude che il 111 è anch' esso esattamente divisibile per 3: perchè il quoziente della divisione del numero totale dovendo essere eguale alla somma dei due quozienti parziali, se questi due quozienti parziali sono interi, la loro somma, cioè il quoziente totale, sarà pure un numero intero; il che prova che il numero totale è esattamente divisibile pel divisore delle due sue parti.

3° *Qualunque numero intero, che divide esattamente una somma composta di due parti, ed una di queste parti, dividerà anche esattamente l'altra parte.*

Sia per esempio 777=350+427. Vedendo facilmente che il numero 7 divide esattamente la somma 777, e la sua prima parte 350, si conchiude che dividerà anche esattamente la seconda parte 427: perchè il quoziente totale dovendo eguagliare la somma dei due quozienti parziali, se, mentre uno di questi quozienti parziali è intero, l'altro non lo fosse, ne seguirebbe che un numero intero sarebbe eguale ad un numero intero più una frazione, il che è assurdo.

§ 33. Divisibilità dei numeri per 2, per 5, per 4 o 25, per 8 o 125, per 3 o 9, e per 11.

Dai sopra esposti principii derivano chiaramente le conseguenze seguenti:

1° *Un numero qualunque terminato da una delle cifre* 0, 2, 4, 6, 8, *è divisibile esattamente per* 2;

Perchè un tale numero può scomporsi in decine ed unità (per esempio 3576=3570+6); ora la prima parte essendo un multiplo di decine, è sempre divisibile per 2, giacchè $10=2\times5$; la seconda parte essendo espressa da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8, è pure divisibile per 2: dunque il numero totale è divisibile per 2.

Se un numero è terminato da una delle cifre 1, 3, 5, 7, 9, allora non è divisibile per 2, poichè una sola delle sue due parti è divisibile per 2, e l'altra non è divisibile.

Un numero qualunque divisibile per 2 si chiama *numero pari*, perchè si può spartire in due parti eguali senza spezzare l'unità. Tutti gli altri numeri non divisibili per 2 sono *numeri impari.*

2° *Un numero qualunque terminato da un* 0 *oppure da* 5, *è esattamente divisibile per* 5.

La dimostrazione è la stessa come pel divisore 2, giacchè scomponendo il numero in decine ed unità, la prima parte essendo un multiplo di 10, è sempre divisibile per 5; e la seconda parte essendo zero oppure 5, è anche divisibile per 5.

3° *Un numero qualunque sarà divisibile per* 4 *o per* 25, *se le sue due ultime cifre esprimono un numero divisibile per* 4 *o per* 25;

Perchè scomponendo il numero in due parti, delle quali la prima contenga tutte le centinaia del numero, e la seconda contenga le decine e le unità, la prima parte, che è un multiplo di 100, sarà sempre divisibile per 4 e per 25, che sono i due fattori di 100: dunque il numero totale sarà divisibile per 4, quando le due ultime cifre esprimono un multiplo di 4, e sarà

divisibile per 25, se le due ultime cifre esprimono 25, oppure un multiplo di 25.

Così i numeri 3324, e 1136 sono divisibili per 4: ed i numeri 1375, e 2150 sono divisibili per 25.

Dunque perchè un numero sia divisibile per 25, deve necessariamente finire colle cifre 00, 25, 50, 75.

4° *Un numero qualunque è divisibile per* 8, *o per* 125, *se le sue tre ultime cifre fanno un numero divisibile per* 8 *o per* 125.

Per la dimostrazione basterà osservare che la parte del numero posta alla sinistra delle tre ultime cifre, essendo un multiplo di mille, sarà sempre divisibile per 8 e per 125, giacchè $1000=8\times125$: dunque ecc.

5° *Un numero è divisibile per* 3 *o per* 9, *se la somma delle sue cifre significative, considerate nel loro valore assoluto, è divisibile per* 3, *o per* 9.

Per mettere in evidenza questa verità si osservi che:

$$10=9+1,\ 100=99+1,\ 1000=999+1 \text{ ecc.}$$

Dunque dividendo per 9 un numero formato dall' unità seguita da un numero qualunque di zeri, si avrà sempre per residuo finale 1.

Si osservi ancora che:

$$200=2\times100=2\times(99+1)=2\times99+2.$$
$$3000=3\times1000=3\times(999+1)=3\times999+3 \text{ ecc.}$$

Queste scomposizioni fanno facilmente vedere, che dividendo per 9 un numero formato da una sola cifra significativa seguita da un numero qualunque di zeri, si ottiene sempre per resto finale la cifra stessa significativa.

Dietro queste considerazioni, essendo proposto il numero

$$7623=7000+600+20+3,$$

è visibile, che dividendo per 9 tutte le parti componenti il numero totale, si avranno per resti successivi tutte le cifre significative del numero proposto $7+6+2+3$; ora se la somma di tutti questi

resti, o sia la somma delle cifre del numero proposto è un multiplo di 9, come accade in questo caso, allora la divisione del numero per 9 si farà esattamente.

Lo stesso ragionamento proverà che un numero è divisibile per 3, quando la somma delle sue cifre è moltiplice di 3.

Così i due numeri 7524 e 8973 sono l'uno e l'altro divisibili per 9, perchè la somma delle cifre è 18 nel primo e 27 nel secondo: il numero 7311 è divisibile per 3, perchè 12, somma delle sue cifre, è un multiplo di 3: ed il numero 34511, avendo per somma delle sue cifre 14, non è divisibile nè per 9, nè per 3; ma diviso per 9, darà per resto 5; e diviso per 3, darà per resto 2.

6° *Un numero è divisibile per 11, quando la differenza tra la somma delle sue cifre d'ordine impari (cominciando dalla destra) e la somma delle cifre d'ordine pari, è 0, oppure un multiplo di 11.*

Per dimostrare questa proprietà del numero 11, si premetteranno i due principii seguenti di facile verificazione.

1° Ciascuna unità d'ordine impari diminuita dell' unità semplice, dà un risultato divisibile per 11. Così se dai numeri 1, 100, 10000, 1000000 si toglie 1, risulteranno i numeri 0, 99, 9999, 999999, tutti esattamente divisibili per 11.

2° Ciascuna unità d'ordine pari, accresciuta dell'unità semplice: dà un risultato divisibile per 11, perchè se a ciascuno dei numeri 10,1000, 100000.ecc. si aggiugne 1, si formeranno i numeri 11, 1001, 100001 ecc. parimenti tutti divisibili per 11.

Ora se il valore relativo di ciascuna unità di ordine impari diminuito di 1, diventa divisibile per 11, è manifesto che il valore delle cifre 2, 3, 4 ecc. di qualunque ordine impari, deve diminuirsi rispettivamente di 2, di 3, di 4 unità semplici, perchè diventi divisibile per 11.

E se il valore di ciascuna unità d'ordine pari dev'essere accresciuto di 1, per diventar divisibile per 11, il valore delle cifre 2, 3, 4 ecc. di qualunque ordine pari, dovrà accrescersi rispettivamente di 2, 3, 4 ecc., perchè possa esattamente dividersi per 11.

Da queste premesse deriva il modo di provare se un numero

è, o non è divisibile per 11. Sia per esempio il numero 25795; la somma delle cifre d'ordine impari è 5+7+2=14, e quella delle cifre d' ordine pari è 9+5=14. La differenza tra queste due somme essendo zero, prova che il numero è divisibile per 11: infatti il numero 25795 si può scomporre nelle due parti 20705+5090, la prima delle quali diminuita di 14, e la seconda accresciuta di 14, diventano ambedue divisibili per 11; e siccome la loro somma non varia per le due operazioni contrarie eseguite sulle due parti, ne consegue che il numero proposto sarà esattamente divisibile per 11.

Il numero 1925 è divisibile per 11, perchè 14—3=11: il numero poi 1787 non è divisibile per 11, perchè 14, somma delle cifre d'ordine impari meno 9, somma delle cifre d' ordine pari, dà per resto 5; questo resto 5 sarà pur quello della divisione del numero 1787 per 11.

La considerazione dei resti provegnenti dalla divisione dei diversi ordini di unità componenti un numero, condurrebbe anche a scoprire le condizioni necessarie perchè un numero sia divisibile pei numeri primi 7, 13 ecc.; ma la ricognizione pratica di queste condizioni nei casi particolari essendo un' operazione più complicata e più lunga della divisione stessa del numero per 7, o per 13, si tralascieranno queste ricerche più curiose che utili ai giovani principianti, bastando avvertire che un numero divisibile per due o più numeri primi o solamente primi tra loro, sarà ancor divisibile per il prodotto di tutti questi numeri. Così il numero 18348, che ha i caratteri di divisibilità per 3, 4 e 11, è divisibile per il prodotto 3 × 4 × 11, cioè per 132. Ed il numero 21285 divisibile per 5, 9 e 11, sarà pur anche divisibile pel loro prodotto 495. Ma per non incorrere in gravi errori, bisogna guardarsi di estendere generalmente questa proprietà ai divisori non primi tra loro. Così il numero 36, ad esempio, divisibile per 3 e per 9, non è più divisibile pel loro prodotto 27, perchè il fattore 3 essendo ripetuto una volta di più nel divisore 27, che nel dividendo 36, rende la divisione impossibile. Per lo stesso motivo il numero

72 divisibile per 6 e per 9, non lo è più pel loro prodotto 54.

Generalmente perchè una divisione possa riuscire esattamente in un quoziente intero, è necessario che tutti i fattori del divisore siano ripetuti nel dividendo almeno tante volte, quante lo sono nel divisore.

§ 34. Ricerca dei divisori di un numero.

Può sovente accadere di aver bisogno di conoscere tutti i divisori di un numero tanto semplici, come composti.

Per trovare i divisori semplici o primi di un numero, bisogna dividerlo successivamente per 2 tante volte, quante si potrà; quando non si potrà più dividere per 2, converrà dividere il quoziente per 3 quante volte si potrà, e continuare così la divisione per 5, e per gli altri numeri primi, fino a che risulti un quoziente uguale a 1: tutti i divisori disposti per ordine in una linea saranno i fattori primi del numero proposto. Per trovare poi tutti gli altri divisori, basterà moltiplicare tra di loro convenientemente i divisori primi già trovati 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, ecc.

Si applichi la presente regola a ritrovare i divisori di 360. Nella pratica si dispone l'operazione come segue:

360	2
180	2, 4
90	2, 8
45	3, 6, 12, 24
15	3, 9, 18, 36, 72
5	5, 10, 15, 20, 30, 40, 45, 60, 90, 120, 180, 360.
1	

Dividendo 360 per 2, si scriverà il quoziente 180 sotto il dividendo; si dividerà di nuovo 180 per 2, e quindi il quoziente 90 ancora per 2; non potendosi dividere 45 per 2, si dividerà per 3, e quindi il quoziente 15 ancora per 3; finalmente dividendo 5 per 5, si avrà per quoziente 1: sicchè i fattori sem-

plici, o primi di 360, non contando 1, che è fattore di tutti i numeri, sono 2, 2, 2, 3, 3, 5.

Moltiplicando questi sei fattori primi 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 ecc., ed escludendo i prodotti ripetuti, si formeranno tutti gli altri divisori qui sopra registrati. L'andamento tenuto nella ricerca dei divisori di 360, mostra abbastanza come si debba operare per qualunque altro numero.

CAPO IV.

ARTICOLO I.

Frazioni ordinarie.

Frazione ed enunciazione della medesima. — Numeratore e denominatore, frazione propriamente detta e frazione impropria — Regola per ridurre l'intero in espressione frazionaria. — Conseguenze che derivano dalla definizione del numeratore e del denominatore. — Riduzione delle frazioni a minimi termini. — Massimo comun divisore, e regola generale per la ricerca del medesimo. — Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore; regola generale e casi in cui questa può essere abbreviata. — Operazioni che possono praticarsi sopra una frazione senza cangiarne il valore.

§ 35. Frazione ed enunciazione della medesima.

La divisione non dà sempre un quoziente esatto in numeri interi; volendo, per esempio, dividere 25 per 7, si trova per quoziente 3 con un residuo 4.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \underline{21} & 3 \\ 4 & \end{array}$$

Il residuo 4 minore del divisore prova che 21 è il più grande multiplo di 7 contenuto in 25. Ora scomponendo il 25 in due parti 21+4, si avrà manifestamente il quoziente totale di 25 diviso per 7: aggiugnendo insieme i due quozienti di 21 e di 4 divisi separatamente per 7, il primo di questi quozienti è 3: per ottenere il secondo provegnente dalla divisione di 4 per 7, s'immagini l'unità divisa in 7 parti uguali; ciascheduna di queste parti sarà la settima parte, oppure il settimo di 1, ed esprimerà il quoziente di 1 diviso per 7, giacchè ciascuna parte

presa sette volte riproduce il dividendo 1; ma 4 essendo composto di quattro volte 1, il quoziente di 4 diviso per 7 sarà eguale a quattro volte il quoziente di 1 diviso per 7, ossia 4 volte il settimo di 1, ovvero 4 settimi. Dunque il quoziente di 25 diviso per 7 è 3 + 4 settimi. Questa seconda parte del quoziente, cioè quattro settimi, essendo minore di un'unità semplice, si chiama *frazione*, che significa parte dell'unità.

La frazione aggiunta al quoziente intero, esprimendo il valore del resto diviso pel divisore, si nota col segno ordinario della divisione, scrivendo cioè il divisore sotto il resto con una linea frammessa nella maniera seguente: $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} =$ tre più quattro settimi.

Nella stessa maniera si notano e si valutano i quozienti provegnenti dai resti finali di qualunque divisione, o in generale i quozienti di tutte quelle divisioni, in cui il dividendo è minore del divisore, giacchè queste divisioni non esprimono altro che frazioni.

Per nominare una frazione si adoperano i nomi relativi alle diverse suddivisioni dell'unità. Quando l'unità è divisa in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 parti eguali, ciascheduna parte si nomina *un mezzo* o *una metà*, *un terzo*, *un quarto*, *un quinto*, *un sesto*, *un settimo*, *un ottavo*, *un nono*, *un decimo*.

Quando poi l'unità è divisa in più di 10 parti, si forma il loro nome terminando in *esimo* il numero indicante in quante parti eguali l'unità è stata divisa. Così si dice un *dodicesimo*, un *quindicesimo*, un *venticinquesimo* ecc., per indicare una parte dell'unità divisa in 12, 15, 25 ecc. parti eguali.

Le espressioni $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{13}, \frac{23}{50}$ significano *due terzi*, *quattro quinti*, *sette ottavi*, *undici tredicesimi*, *ventitre cinquantesimi*.

§ 36. Numeratore e denominatore; frazione propriamente detta, e frazione impropria.

L'enunciazione di una frazione qualunque, di $\frac{5}{8}$, per esempio, comprende necessariamente due numeri interi. L'inferiore 8 indicando in quante parti eguali s'intende divisa l'unità, fa conoscere la grandezza di queste parti e si chiama *denominatore*, perchè dà il nome alle parti della frazione. Il superiore 5, significando quante di queste parti si debbono prendere, si chiama *numeratore*, perchè numera le parti contenute nella frazione. Il numeratore ed il denominatore si chiamano unitamente i due *termini* della frazione.

Due o più frazioni dello stesso denominatore si dicono *omogenee*, o della stessa specie; e se le frazioni hanno un denominatore diverso, allora si dicono *eterogenee*, o di diversa specie. Così $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$ sono frazioni della stessa specie; $\frac{5}{7}$ e $\frac{4}{9}$ sono di specie diversa.

Quando il numeratore ed il denominatore sono eguali, la frazione equivale ad una unità, perchè per valutare $\frac{12}{12}$, ad es., si divide l'unità in dodici parti eguali, e si prendono tutte le dodici parti; dunque $\frac{12}{12}=1$: il che significa anche che un numero qualunque diviso per se stesso dà per quoziente l'unità.

Quando il numeratore è più grande del denominatore, come in $\frac{13}{5}$, ad esempio, la frazione dicesi *impropria*, perchè il suo valore supera l'unità; e per distinguerla dalle frazioni propriamente dette, più piccole dell'unità, si chiama *numero frazionario*; si estraggono gl'interi dividendo il numeratore pel denominatore; $\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}$.

§ 37. Regola per ridurre l'intero in espressione frazionaria.

Un numero intero qualunque può sempre ridursi alla forma di un numero frazionario: per questo si moltiplica l'intero pel denominatore che si vuol dare all'espressione frazionaria, e sotto il prodotto si scrive il denominatore stesso; così 5, ad esempio, è lo stesso che $\frac{20}{4}$; perchè l'unità essendo composta di quattro quarti, 5 unità varranno 5 volte quattro quarti, cioè 20 quarti.

È sovente utile il ridurre ad una sola espressione frazionaria un numero intero unito ad una frazione, come $6+\frac{5}{9}$; per fare questa riduzione basterà osservare, che conformemente al qui avanti detto, il 6 vale $\frac{54}{9}$, ed aggiungendovi la frazione $\frac{5}{9}$, si avrà $\frac{59}{9}=6+\frac{5}{9}$: onde si deduce la seguente regola:

Si moltiplicherà l'intero pel denominatore della frazione unita, si aggiungerà al prodotto il numeratore di questa, e si darà al risultato il denominatore della frazione stessa.

§ 38. Conseguenze che derivano dalla definizione del numeratore e del denominatore.

Dalla definizione del numeratore e del denominatore derivano manifestamente le conseguenze seguenti:

1° *Se si moltiplica, o si divide il solo numeratore di una frazione per un numero intero, la frazione stessa è nel primo caso moltiplicata, e nel secondo divisa per lo stesso numero intero;* poichè non alterando il denominatore, la grandezza delle parti rimane la medesima, ed il loro numero è moltiplicato o diviso.

Così essendo data la frazione $\frac{6}{25}$, moltiplicando per 2 il solo numeratore, si avrà la frazione $\frac{12}{25}$ doppia della prima, e moltiplicando per 3, si avrà $\frac{18}{25}$, che è una frazione tripla di $\frac{6}{25}$. Al contrario, dalla frazione $\frac{6}{25}$ dividendone il numeratore per 2 o per 3, risultano le frazioni $\frac{3}{25}$, o $\frac{2}{25}$, che sono visibilmente la metà o il terzo della proposta.

2° *Se senza alterare il numeratore di una frazione, si moltiplica, o si divide il solo denominatore per un numero intiero, nel primo caso si divide e nel secondo si moltiplica la frazione per lo stesso numero*: perchè moltiplicando il solo denominatore per 2, 3, 4.... si indica che l'unità viene divisa in un numero doppio, triplo, quadruplo ecc. di parti eguali; le nuove parti saranno dunque 2, 3, 4.... volte più piccole; e prendendone lo stesso numero indicato dal numeratore invariabile, la nuova frazione risultante sarà 2, 3, 4... volte più piccola.

Al contrario dividendo il denominatore per 2, 3, 4.... si indica che l'unità deve essere divisa in un numero 2, 3, 4.... volte minore di parti eguali; per conseguenza le nuove parti saranno 2, 3, 4.... volte più grandi; e siccome se ne prende lo stesso numero, la frazione risultante sarà 2, 3, 4.... volte più grande della prima. Così dalla frazione $\frac{3}{5}$, moltiplicandone il denominatore per 2, 3, 4, nascono le frazioni $\frac{3}{10}, \frac{3}{15}, \frac{3}{20}$, che sono rispettivamente la metà, il terzo, il quarto della proposta. E dalla frazione $\frac{5}{24}$, dividendone il denominatore per 2, 3, 4, derivano le frazioni $\frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}$, che esprimono il doppio, il triplo, il quadruplo della proposta.

Vi sono dunque due maniere di eseguire la moltiplicazione di una frazione per un numero intero, cioè o col moltiplicarne il numeratore, o col dividerne il denominatore per l'intero. La prima è sempre possibile, la seconda non sempre; ma si deve preferire alla prima quando si può praticare, perchè la frazione prende allora una forma più semplice. Si hanno pure due modi di dividere una frazione per un intero; cioè o col dividerne il numeratore, o col moltiplicarne il denominatore, il secondo solo è sempre possibile; ma si preferisce il primo, quando si può, per la stessa ragione ora addotta.

3° *Non si cangia il valore di una frazione moltiplicando, o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero.*

Infatti col moltiplicare il denominatore si accresce il numero, e si diminuisce la grandezza delle parti, in cui l'unità dee intendersi divisa: ma moltiplicando poscia il numeratore, si vengono a prendere tante più di queste parti, quanto esse si sono fatte minori. Al contrario dividendo il denominatore, si diminuisce il numero, e si accresce la grandezza delle parti dell'unità: ma col dividere poscia il numeratore, si prenderanno tante meno di queste parti, quanto esse si sono fatte maggiori. Così, per esempio, la frazione $\frac{3}{4}$ è equivalente a ciascuna delle frazioni $\frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}$ risultanti dalla moltiplicazione dei due termini di $\frac{3}{4}$ per 2, 3, 4, 5: medesimamente la frazione $\frac{24}{36}$ è eguale a ciascuna delle frazioni $\frac{12}{18}, \frac{8}{12}, \frac{6}{9}, \frac{2}{3}$ provegnenti dalla divisione dei due termini di $\frac{24}{36}$ per 2, 3, 4, 12.

Si noti, che la divisione dei due termini di una frazione per uno stesso numero, quando è possibile, riduce la frazione a forma più semplice.

§ 39. Riduzione delle frazioni a minimi termini.

La difficoltà di farsi un'idea chiara del valore di una frazione cresce a misura che i suoi termini sono numeri di più in più grandi. Sarà dunque utile di ridurre, quando si può, le frazioni rappresentate da numeri grandi in altre equivalenti, ma espresse da numeri minori; il che si chiama ridurre le frazioni a forma più semplice, o a *più semplice espressione.*

Il primo mezzo che si presenta per fare questa riduzione, si è di vedere se i due termini della frazione sono ambedue divisibili per qualche numero semplice 2, 3, 4, 5 ecc., e di eseguire sopra i due termini, finchè si può, la divisione per questi divisori comuni.

Sia, per esempio, da ridurre a termini minori la frazione $\frac{32}{96}$: si vede subito, che i suoi due termini sono divisibili per 2; dividendoli dunque per 2, si avrà $\frac{32}{96}=\frac{16}{48}$; dividendo ancora per 2 i due termini della seconda, si avrà $\frac{8}{24}$; e continuando a dividere per 2, si otterrà successivamente $\frac{4}{12}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3}$; l'ultima frazione $\frac{1}{3}$ non potendosi più ridurre, si chiama *irreduttibile*; essa rappresenta la frazione proposta $\frac{32}{96}$ ridotta a *minimi termini*, o alla sua più semplice espressione.

Medesimamente la frazione $\frac{108}{144}$, dividendo i suoi due termini due volte di seguito per 2, e due volte per 3, darà $\frac{108}{144}=\frac{54}{72}=\frac{27}{36}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ e dividendo per 9 e per 11 i due termini della frazione $\frac{495}{594}$ (§ 33) risulterà $\frac{495}{594}=\frac{55}{66}=\frac{5}{6}$.

Questo metodo è comodo, ma non è generale: perchè i due termini della frazione, massime quando sono numeri grandi, possono avere qualche divisore comune diverso dai primi numeri semplici, e non così facile a scoprire. Ma se si riflette che nei tre precedenti esempi di riduzione, per ottenere le frazioni ridotte a minimi termini $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$, bastava dividere i due termini della prima $\frac{32}{96}$ per 32; i due termini della seconda $\frac{108}{144}$ per 36; ed i due termini della terza $\frac{495}{594}$ per 99; e che i tre numeri 32, 36, 99 rappresentano rispettivamente il più grande comune divisore dei due termini della prima, della seconda e della terza frazione; si conchiuderà facilmente, che il metodo generale e diretto di ridurre una frazione qualunque a minimi termini, consiste nel determinare il massimo divisore comune ai suoi due termini, e nel dividere questi per quello: i due quozienti, che si otterranno così, saranno i due termini della frazione ridotta; onde la quistione di ridurre una frazione alla sua più semplice espressione è naturalmente legata a quest'altra: *essendo dati due numeri, ritrovare il loro massimo comune divisore.*

§ 40. Massimo comun divisore, e regola generale per la ricerca del medesimo.

Egli è in primo luogo evidente, che il massimo divisore comune a due numeri dati non può eccedere il numero minore, il quale sarà esso stesso il comune divisore cercato, se dividerà esattamente l'altro numero. Sieno per es. 667 e 203 i numeri proposti: si dividerà 667 per 203, per vedere se il 203 è egli stesso il comune divisore cercato: fatta la divisione, si trova un quoziente 3, ed un residuo 58; il che prova che 203 non è comune divisore dei due numeri proposti.

Ma essendo $667 = 203 \times 3 + 58$, egli è chiaro (§ 32), che se i due numeri 667 e 203 hanno un comune divisore, questo

comune divisore deve dividere esattamente il resto 58 della loro divisione, altrimenti si cadrebbe nell' assurdo, che un numero intero sia eguale ad un altro intero più una frazione.

Questo principio è generale per tutti i numeri, e si enuncia così: *qualunque divisore comune tra due numeri deve dividere il resto della divisione del numero maggiore pel minore.* Si vede dunque, che il divisore comune tra 667 e 203 deve anche essere comune tra 203 e 58. Operando sopra 203 e 58 come sopra i due numeri proposti, si dividerà 203 per 58, e trovandosi il quoziente 3 col resto 29, si conchiuderà come precedentemente, che il divisore comune a 203 e 58 deve dividere esattamente il resto 29 della loro divisione: di modo che il divisore comune di 203 e 58 è lo stesso che quello di 58 e 29; dividendo 58 per 29, si ha un quoziente 2 senza alcun resto; il che prova che 29 è il più grande divisore comune tra 58 e 29, e per conseguenza tra 203 e 58, ed anche tra 667 e 203.

Infatti 29 dividendo se stesso e 58, dividerà $58 \times 3 + 29 = 203$: e dividendo 203 e 58, dividerà anche $203 \times 3 + 58 = 667$, dunque 29 è il massimo comune divisore di 667 e 203. Nella pratica si può disporre l'operazione come segue:

	3	3	2
667	203	58	29
58	29	0	

Si divide 667 per 203, e si scrive il quoziente 3 sopra il divisore, ed il resto 58 alla destra del numero minore 203; si divide poscia 203 per 58, e si scrive il quoziente 3 sopra il divisore 58, ed il resto 29 alla destra dello stesso divisore 58; e così di seguito.

L'andamento tenuto nell'esempio precedente potendosi applicare a tutti i numeri, dà luogo alla seguente regola generale:

Per trovare il massimo comun divisore di due numeri, si divide il numero maggiore pel minore; se l'operazione si fa esattamente, il numero minore sarà il divisore cercato; ***se havvi un***

resto, si divide il numero minore per questo resto, quindi il primo resto pel secondo resto; e si continuerà così dividendo sempre il penultimo resto per l'ultimo, finchè si arrivi ad un quoziente esatto: l'ultimo resto, che preso per divisore dà un quoziente esatto, sarà il massimo comune divisore ricercato.

Se l'ultimo divisore è l'unità, i due numeri sono primi tra loro, e la frazione espressa da questi numeri sarà *irreduttibile*, o meglio già ridotta a minimi termini.

Ecco alcune applicazioni di questa regola, per ridurre a minimi termini le frazioni seguenti:

$$\frac{203}{667},\ \frac{143}{637},\ \frac{329}{517},\ \frac{1944}{2916},$$

	4	2	5		1	1	1	3		1	2
637	143	65	13	517	329	188	141	47	2916	1944	972
65	13	0		188	141	47	0		972	000	

Cercando il massimo comune divisore dei due termini di ciascuna frazione, si troverà 29 pei termini della prima, e 13, 47, 972 corrispondentemente pei termini della seconda, terza e quarta. Dunque dividendo i due termini di ciascuna frazione pel loro corrispondente divisore comune, si troveranno le frazioni $\frac{7}{23}$, $\frac{11}{49}$, $\frac{7}{11}$, e $\frac{2}{3}$, che esprimono ordinariamente i valori delle quattro frazioni proposte ridotte a minimi termini.

§ 41. Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore, regola generale, e casi in cui questa può essere abbreviata.

Se si dimandasse quale delle due frazioni $\frac{5}{7}$ e $\frac{12}{17}$ sia la più grande, non si potrebbe rispondere subito ad un tale quesito, perchè bisognerebbe paragonare tra di loro due diversi numeri di parti di specie diversa. Ma se fosse possibile di esprimere le due frazioni in parti della medesima specie, senza cangiare il valore delle frazioni, allora si toglierebbero le difficoltà; perchè basterebbe paragonare tra di loro i due nominatori, per poter tosto decidere della grandezza relativa delle due frazioni proposte. Ora se si moltiplicano i due termini della prima 5 e 7 per 17 denominatore della seconda, ed i due termini della seconda 12 e 17 per 7 denominatore della prima, nasceranno le frazioni omogenee $\frac{85}{119}$ e $\frac{84}{119}$ rispettivamente eguali alle due proposte (§ 38), e che mostrano subito esse la prima più grande della seconda di $\frac{1}{119}$.

Dall'esempio precedente si scorge, che per ridurre due frazioni allo stesso denominatore, basta *moltiplicare i due termini della prima pel denominatore della seconda, ed i due termini della seconda pel denominatore della prima.*

In questa maniera non si cangia il valore delle frazioni, ed i denominatori diventeranno eguali; poichè ciascuno di essi è il prodotto dei due denominatori primitivi. Così le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$ ridotte allo stesso denominatore, diventeranno $\frac{15}{20}$ e $\frac{8}{20}$.

Siano ancora da ridurre allo stesso denominatore le frazioni $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$: partendo dal principio, che il valore di una frazione non si cangia moltiplicandone i due termini per lo stesso numero, si

vede subito, che basterà moltiplicare i due termini della prima pei denominatori della seconda e della terza; poi i due termini della seconda pei denominatori della prima e della terza; infine i due termini della terza pei denominatori della prima e della seconda; eseguendo il calcolo, risulteranno le frazioni $\frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$ rispettivamente eguali alle tre proposte, e dello stesso denominatore, poichè ciascun denominatore è il prodotto dei tre denominatori primitivi moltiplicati solamente in un ordine variato.

Ciò che si è detto per due e tre frazioni, è vero per un numero qualunque; quindi si deduce la seguente regola generale:

Per ridurre un numero qualunque di frazioni allo stesso denominatore, bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna di esse successivamente per tutti i denominatori delle altre, o, ciò che torna allo stesso, pel prodotto dei denominatori delle altre. In questa maniera le nuove frazioni risultanti conserveranno rispettivamente lo stesso valore delle primitive, ed i loro denominatori saranno eguali in tutte, essendo questi formati dai prodotti di tutti i denominatori.

Può accadere, che uno dei denominatori sia un multiplo di ciascuno degli altri: in questo caso la riduzione allo stesso denominatore può farsi più speditamente, ed il denominatore delle frazioni ridotte riuscirà minore del prodotto di tutti i denominatori.

Siano, per esempio, le frazioni

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{9},\quad \frac{11}{12},\quad \frac{19}{36};$$
$$12.\quad 9.\quad 6.\quad 4.\quad 3.\quad 1.$$
$$\frac{24}{36},\quad \frac{27}{36},\quad \frac{30}{36},\quad \frac{28}{36},\quad \frac{33}{36},\quad \frac{19}{36};$$

si vede subito che l'ultimo denominatore 36 è esattamente divisibile per ciascuno degli altri; e che tutte le frazioni possono facilmente ridursi al denominatore 36, moltiplicando i due ter-

mini di ciascuna di esse pel quoziente della divisione di 36 pel suo denominatore: per maggior facilità, i diversi quozienti che debbono servire di moltiplicatori dei due termini delle diverse frazioni, si notano rispettivamente sotto le frazioni da ridursi, come si vede nel presente esempio.

Siano ancora da ridursi allo stesso denominatore le frazioni

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{4}, & \frac{7}{8}, & \frac{11}{12}, & \frac{13}{18}, & \frac{17}{24}, & \frac{29}{36}; \\ 18. & 9. & 6. & 4. & 3. & 2. \\ \hline \frac{54}{72}, & \frac{63}{72}, & \frac{66}{72}, & \frac{52}{72}, & \frac{51}{72}, & \frac{58}{72}; \end{array}$$

in questo caso le frazioni proposte non possono ridursi tutte al denominatore 36, perchè il 36 non è un multiplo di 8 e di 24; ma con un po' di attenzione si scopre subito, che 72, doppio di 36, è multiplo di tutti i denominatori. Dunque le frazioni proposte possono ridursi tutte al denominatore 72. Onde si notano sotto le diverse frazioni i rispettivi quozienti della divisione di 72 pei loro denominatori, e si moltiplicano quindi i due termini di ciascuna frazione pel corrispondente quoziente, o moltiplicatore; così tutte le frazioni acquistano lo stesso denominatore 72, molto più semplice del prodotto di tutti i denominatori, come risulterebbe dalla regola generale.

Simili abbreviazioni possono avere luogo ogni volta che i denominatori non sono primi tra loro; ma esse richiedono attenzione, ed una grande famigliarità del *conteggio pratico*, che non si acquista se non con un esercizio continuato. Chi non è assuefatto a scomporre i numeri nei loro fattori semplici, e a veder prontamente quali fattori primi si dovrebbero introdurre in alcuno di essi, per renderlo multiplo di altri numeri dati, può attenersi alla regola generale, che arriverà sempre, quantunque per una via più lunga, al suo intento.

§ 42. Operazioni che possono praticarsi sopra una frazione senza cangiarne il valore.

Il moltiplicare ed il dividere i due termini per uno stesso numero sono le due sole operazioni, che possano praticarsi sopra una frazione senza cangiarne il valore; qualunque altro cangiamento fatto sui due termini, altera il valore della frazione.

Così, se ai due termini della frazione $\frac{3}{5}$, per esempio, si aggiunge uno stesso numero 4, la frazione risultante $\frac{3+4}{5+4}=\frac{7}{9}$ sarà più grande della proposta; del che potrà ognuno facilmente convincersi col ridurre le due frazioni allo stesso denominatore; oppure, osservando che alla prima frazione $\frac{3}{5}$ mancano $\frac{2}{5}$ per formare l'unità, mentre alla seconda $\frac{7}{9}$ mancano solamente $\frac{2}{9}$; *dunque aggiungendo uno stesso numero ai due termini, la frazione cresce; e per conseguenza essa diminuirà, se dai suoi due termini si levi uno stesso numero.*

L'effetto succede in senso inverso quando invece di una frazione propria si tratti di un numero frazionario, cioè: *un numero frazionario diminuisce, o cresce, secondo che si aggiugne ai suoi due termini, o da essi si levi uno stesso numero.*

Sia ad esempio $\frac{8}{7}$; se ai due termini si aggiunge 2, si avrà $\frac{10}{9}$ minore di $\frac{8}{7}$; e se dai due termini si toglie 2, si avrà $\frac{6}{5}$ maggiore di $\frac{8}{7}$; il che s'intenderà facilmente, osservando che $\frac{8}{7}=1+\frac{1}{7}$; $\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}$ e $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$, e che $\frac{1}{5}$ è maggiore di $\frac{1}{7}$, mentre $\frac{1}{9}$ n'è minore.

Premesse queste nozioni generali, si passi alle quattro operazioni fondamentali sulle frazioni.

ARTICOLO II.

Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione delle frazioni ordinarie

—

Addizione solo effettuabile quando le frazioni hanno lo stesso denominatore. — Sottrazione solo effettuabile quando le frazioni hanno lo stesso denominatore. — Moltiplicazione di una frazione per un intero; di un intero per una frazione; di una frazione per un'altra, e di più frazioni fra loro — i fattori comuni ai due termini del prodotto vogliono essere soppressi prima di effettuarne le moltiplicazioni. — Casi di fattori composti di numeri interi uniti a frazioni — Divisione di una frazione per un intero; di un intero per una frazione; di una frazione per un'altra, e di un intero misto a frazione per un intero pur misto a frazione.

—

§ 43. Addizione solo effettuabile quando le frazioni hanno lo stesso denominatore.

Si sa che il denominatore di una frazione qualunque indica solamente la specie delle parti contenute nella frazione; dunque sommare 2 con 3, sarà lo stesso che sommare 2 lire con 3 lire, ed anche lo stesso che sommare $\frac{2}{7}$ con $\frac{3}{7}$: nel primo caso la somma è 5, nel secondo 5 lire, e nel terzo $\frac{5}{7}$. Di qui si vede, che per fare la somma di più frazioni della stessa denominazione, basterà sommare insieme tutti i numeratori, e dare a questa somma il comune denominatore. Così le frazioni

$$\frac{3}{20}+\frac{7}{20}+\frac{11}{20}+\frac{13}{20}+\frac{17}{20}+\frac{19}{20}$$

danno per somma $\frac{70}{20}=3+\frac{1}{2}$, estraendo gl'intieri, e semplificando la frazione restante.

Se poi le frazioni da sommarsi non hanno lo stesso denominatore, è chiaro che in tal stato non potranno sommarsi insieme perchè rappresentano numeri di diversa specie; bisognerà dunque ridurle primieramente alla stessa specie, ossia allo stesso denominatore, quindi si farà la somma come si è detto.

Così le frazioni $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$ ridotte allo stesso denominatore, diventano $\frac{40}{60}+\frac{45}{60}+\frac{48}{60}$, e la loro somma sarà $\frac{133}{60}=2+\frac{13}{60}$.

§ 41. Sottrazione solo effettuabile quando le frazioni hanno lo stesso denominatore.

Per sottrarre una frazione da un'altra della stessa specie, basterà sottrarre il numeratore della prima dal numeratore della seconda, e dare alla differenza dei due numeratori il denominatore comune: così $\frac{7}{11}-\frac{3}{11}=\frac{4}{11}$.

Se le due frazioni non sono della stessa specie, si ridurranno prima allo stesso denominatore, e si farà quindi la sottrazione, come si è detto.

Così volendo da $\frac{7}{9}$ sottrarre $\frac{8}{11}$, non si potrà; ma riducendo le due frazioni allo stesso denominatore, si avrà subito $\frac{7}{9}-\frac{8}{11}=\frac{77}{99}-\frac{72}{99}=\frac{5}{99}$.

Ecco un quesito relativo all'addizione e sottrazione di numeri intieri uniti con frazioni.

Un mercante ha venduto in diverse volte 12 rasi e $\frac{1}{3}$, 9$^{r}\frac{1}{4}$, 13$^{r}\frac{5}{6}$ di una stessa pezza di panno lunga 42$^{r}\frac{3}{4}$, e desidera sapere quanti rasi gli restino di detto panno.

Si farà la somma dei tre numeri di rasi venduti, e si le-

verà poi questa somma da $42^r \frac{3}{4}$: il risultato della sottrazione rappresenterà la lunghezza del restante panno.

$$
\begin{array}{rll}
12^r \frac{1}{3} \ldots\ldots & \frac{4}{12} \\
9 \ \frac{1}{4} \ldots\ldots & \frac{3}{12} \\
\hline
13 \ \frac{5}{6} \ldots\ldots & \frac{10}{12} \\
\hline
\text{Somma } 35^r \frac{5}{12}. &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
42^r \frac{3}{4} \ldots\ldots & \frac{9}{12} \\
35^r \frac{5}{12} & \\
\hline
\text{Resto } 7^r \frac{4}{12} = 7^r \frac{1}{3} &
\end{array}
$$

§ 45. Moltiplicazione di una frazione per un intero; di un intero per una frazione; di una frazione per un'altra; e di più frazioni fra loro.

Il fine generale della moltiplicazione si è (§ 24) di formare il prodotto col moltiplicando, nella stessa maniera che il moltiplicatore è formato dall'unità: di qui segue

Primo. Che per moltiplicare $\frac{7}{12}$ per 5, basterà prendere 5 volte la frazione $\frac{7}{12}$, il che darà $\frac{35}{12}=2+\frac{11}{12}$; in questo modo il prodotto conterrà cinque volte il moltiplicando, come il moltiplicatore contiene cinque volte l'unità.

Dunque per moltiplicare una frazione per un intero, bisogna moltiplicare il numeratore per lo intero, e dare al prodotto il denominatore della frazione.

Secondo. Per moltiplicare 12 per $\frac{3}{5}$, bisognerà prendere 3 volte il quinto di 12, giacchè il moltiplicatore è 3 volte il quinto dell'unità; ora il quinto di 12 essendo $\frac{12}{5}$, tre volte $\frac{12}{5}$ daranno

$\frac{36}{5}=7+\frac{1}{5}$ pel prodotto ricercato.

Dunque per moltiplicare un intero per una frazione bisogna moltiplicare l'intero pel numeratore, e dare al prodotto il denominatore della frazione. Così $35\times\frac{3}{7}=\frac{105}{7}=15$.

Terzo. Si debba ora moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$; essendo qui il moltiplicatore 4 volte il quinto dell'unità, si prenderà 4 volte il quinto del moltiplicando $\frac{2}{3}$; ma il quinto di $\frac{2}{3}$ è $\frac{2}{15}$ (§ 38) e 4 volte $\frac{2}{15}$ danno $\frac{8}{15}$ pel prodotto dimandato.

Dunque per moltiplicare una frazione per un'altra frazione basta moltiplicare i due numeratori tra di loro, ed i due denominatori parimente tra loro, e dare il secondo prodotto per denominatore al primo. Così $\frac{8}{15}\times\frac{3}{4}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$.

Si noti, che quando il moltiplicatore è una frazione, il prodotto è sempre più piccolo del moltiplicando: perchè moltiplicare un numero qualunque per una frazione significa generalmente prendere quella parte del moltiplicando, che è indicata dalla frazione moltiplicatore.

Occorre sovente di dover moltiplicare successivamente più frazioni tra di loro, come per es. $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$; quest'operazione è conosciuta sotto il nome di regola delle frazioni di frazioni, perchè serve appunto a prendere le frazioni di frazioni di altre frazioni; così nell'esempio citato il prodotto $\frac{2}{5}$ esprime i $\frac{3}{4}$ dei $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$, oppure i $\frac{4}{5}$ dei $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, secondo l'ordine della moltiplicazione.

§ 46. I fattori comuni ai due termini del prodotto vogliono essere soppressi prima di effettuarne le moltiplicazioni.

Se le frazioni proposte sono tali, che ne risultino de' fattori comuni ai due termini del prodotto, questi fattori si dovranno sopprimere prima di effettuare le moltiplicazioni. Così nell'esempio addotto è facile lo scorgere, che i fattori 3 e 4 sono comuni al numeratore ed al denominatore, e che il prodotto si riduce immediatamente alla sua più semplice espressione $\frac{2}{5}$, sopprimendo questi due fattori comuni.

§ 47. Caso di fattori composti di numeri interi uniti a frazioni.

Se i due fattori della moltiplicazione sono numeri interi uniti a frazione, come $(3+\frac{4}{5})\times(2+\frac{3}{4})$, si ridurranno questi fattori alla forma di numeri frazionari $\frac{19}{5}$ e $\frac{11}{4}$, e si farà quindi la moltiplicazione secondo la regola delle frazioni; il prodotto sarà $\frac{209}{20}=10+\frac{9}{20}$.

Si potrebbe anche moltiplicare per parti, cioè 3 per 2, $\frac{4}{5}$ per 2, 3 per $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ per $\frac{3}{4}$, e fare quindi la somma dei quattro prodotti parziali; ma questa seconda operazione riescirebbe più lunga della prima.

§ 48. Divisione di una frazione per un intero; di un intero per una frazione; di una frazione per un' altra; e di un intero misto a frazione per un intero pur misto a frazione.

Il fine della divisione (§ 27) consiste generalmente nel risolvere il seguente problema: essendo dato un prodotto chiamato *dividendo*, ed uno dei suoi due fattori chiamato *divisore*, ritrovare l'altro fattore chiamato *quoziente*. Quindi segue (§ 45), che il dividendo è formato dal quoziente, nella stessa maniera che il divisore è formato dall' unità; oppure (ciò che torna allo stesso) il quoziente deve contenere, o essere contenuto nel dividendo, nello stesso modo che l'unità contiene o è contenuta nel divisore.

Ciò posto,si debba primieramente dividere $\frac{3}{4}$ per 5; essendo l'unità il quinto di 5, il quoziente dovrà essere il quinto di $\frac{3}{4}$, cioè $\frac{3}{20}$.

Dunque per dividere una frazione per un intero, si moltiplica il denominatore della frazione per l'intero, senza alterare il numeratore.

Così $\frac{4}{5}$ divisi per 7 danno per quoto $\frac{4}{35}$.

Secondo. Si voglia dividere 12 per $\frac{4}{5}$: qui l'unità è 5 volte il quarto del divisore, dunque il quoziente sarà 5 volte il quarto del dividendo 12: per ottenerlo bisognerà dunque prendere il quarto di 12, che è $\frac{12}{4}$, e ripeterlo 5 volte; il che darà

$$\frac{12\times5}{4}=\frac{60}{4}=15.$$

Dunque per dividere un intero per una frazione bisogna mol-

tiplicare l'intero pel denominatore, e dividere il prodotto pel numeratore: oppure (ciò che torna allo stesso) *moltiplicare l'intero per la frazione divisore rovesciata.* Così 13 diviso per $\frac{7}{11}$ darà per quoziente $13\times\frac{11}{7}=\frac{143}{7}=20+\frac{3}{7}$.

Terzo. Sia da dividere la frazione $\frac{3}{5}$ per la frazione $\frac{7}{8}$: un ragionamento simile al precedente farà tosto vedere; che il quoziente deve essere eguale a 8 volte il settimo del dividendo $\frac{3}{5}$, giacchè l'unità vale 8 volte il settimo del divisore $\frac{7}{8}$; basterà dunque moltiplicare $\frac{3}{5}$ per $\frac{8}{7}$, il che darà $\frac{24}{35}$ pel quoziente ricercato.

Dunque per dividere una frazione per un' altra frazione, conviene moltiplicare il numeratore della prima pel denominatore della seconda frazione, poscia il denominatore della prima pel numeratore della seconda, e dare il secondo prodotto pel denominatore al primo; oppure (in termini più brevi) *moltiplicare la frazione dividenda per la frazione divisore rovesciata.*
Così $\frac{3}{5}$ diviso per $\frac{4}{7}$ danno per quoziente

$$\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}=\frac{21}{20}=1+\frac{1}{20}.$$

Finalmente dovendo dividere un intero unito ad una frazione per un altro intero unito a frazione, si farà la riduzione degli interi in frazioni, e si opererà secondo la regola delle frazioni. Così $7+\frac{2}{3}$ diviso per $3+\frac{4}{5}$ equivale a $\frac{23}{3}$ divisi per $\frac{19}{5}$, che danno per quoziente

$$\frac{23}{3}\times\frac{5}{19}=\frac{115}{57}=2+\frac{1}{57}.$$

Si può notare, che quando il divisore è una frazione propria, il quoziente è sempre più grande del dividendo; perchè il quoziente risulta dal moltiplicare il dividendo per la frazione divisore rovesciata, che diventa allora un numero più grande dell'unità.

ARTICOLO III.

Frazioni decimali.

Frazioni decimali: in che differiscano dalle frazioni ordinarie. — Modo di scriverle; enunciazione e lettura delle medesime. — Come, trasportando la virgola da sinistra a destra o viceversa di una, due o più cifre, si moltiplichi o si divida la frazione decimale per 10,100, ecc. — Il togliere od aggiungere zeri a destra della frazione decimale non ne cangia il valore.

---

§ 49. Frazioni decimali; in che differiscano dalle frazioni ordinarie.

Frazioni decimali sono quelle, che hanno per denominatore l'unità seguita da una o più cifre zero, come $\frac{7}{10}, \frac{54}{100}, \frac{325}{1000}$. Sotto questa forma le frazioni decimali non differiscono dalle frazioni ordinarie considerate precedentemente, ed andrebbero soggette alle stesse regole di calcolo.

Ma la convenzione che si è presa per base del sistema di numerazione, servirà ancora ad esprimere le frazioni decimali in modo semplice, e tale, che tutte le operazioni si eseguiscano sopra di esse con le medesime regole, che valgono pei numeri interi.

§ 50. Modo di scriverle; enunciazione e lettura delle medesime.

Dal principio fondamentale della numerazione scritta risulta, che le cifre, avanzando da destra verso sinistra, acquistano valori relativi di dieci in dieci volte più grandi, e retrocedendo da sinistra verso destra, ripigliano valori di dieci in dieci volte

più piccoli: dunque estendendo questo principio alla destra delle unità semplici, e notando con una virgola il loro posto, la prima cifra dopo la virgola, cioè dopo le unità semplici, esprimerà parti decime dell' unità, che per abbreviare si dicono solamente decimi; la seconda cifra dopo la virgola esprimerà decimi di decimi, ossia centesimi dell'unità; la terza esprimerà millesimi, la quarta diecimillesimi, la quinta centomillesimi, la sesta milionesimi ecc. Così il numero 4,7 rappresenta 4 unità e 7 decimi; il numero 54,62 esprime 54 unità, 6 decimi e 2 centesimi; ma siccome 6 decimi valgono 60 centesimi, così riducendo mentalmente allo stesso denominatore, si leggerà 54 unità e 62 centesimi; ed il numero 0,307 rappresenta zero unità, 3 decimi, zero centesimi, e 7 millesimi; e riducendo i 3 decimi in 300 millesimi, si leggerà zero unità, 307 millesimi: e sarà ancora 0,000342=342 milionesimi.

Dunque per enunciare nel linguaggio ordinario un numero decimale scritto in cifre, *bisogna prima enunciare la parte intera scritta a sinistra della virgola, e quindi la parte scritta a destra, come se rappresentasse un numero intero, e dare a questa seconda parte il nome, o il denominatore dell'ultima cifra.*

Di qui si vede che il denominatore sottointeso di una frazione decimale è sempre l'unità seguita da tante cifre zero, quante sono le cifre scritte dopo la virgola.

Così 7,40305 si leggerà 7 interi, più 40305 centomillesimi; medesimamente 12,002354 si leggerà 12 unità, più 2354 milionesimi.

Reciprocamente per scrivere in cifre un numero decimale enunciato nel linguaggio ordinario, *si scriveranno prima le unità intere colla virgola alla loro destra; quindi si scriveranno le cifre rappresentanti le diverse parti decimali secondo l'enunciato.*

Se il numero pronunciato manca delle unità intere, si scriverà lo zero per tenerne il posto; e se manca di parti decimali di un dato ordine, i loro posti si dovranno pure riempiere con altrettanti zeri, per conservare alle altre cifre il posto conveniente al loro valore. Così per cento cinquantasei unità, quat-

trocento diciannove millesimi, si scriverà 156,419; per quarantacinque unità due mila e tre diecimillesimi, si scriverà 45,2003; per diciasette centesimi, si scriverà 0,17; e per dodici mila dugento e quattro milionesimi, si scriverà 0,012204. Quindi si può facilmente vedere, che il sistema delle parti decimali non è altro che una estensione del sistema adottato pei numeri interi.

§ 51. Come, trasportando la virgola da sinistra a destra o viceversa di una, due o più cifre, si moltiplichi o si divida la frazione decimale per 10, 100, ecc.

Se in un numero decimale qualunque si trasporta la virgola verso destra di uno, due o tre posti ecc.; si moltiplica il numero per 10, 100, 1000 ecc., e se al contrario si trasporta la virgola verso sinistra di uno, due o tre ordini ecc., allora si divide il numero per 10, 100, 1000 ecc.

Così il numero 4357,2168, trasportando la virgola di tre ordini verso destra, diventerà 4357216,8 mille volte più grande del primo; giacchè pel trasportamento della virgola, essendosi tutte le cifre avanzate di tre ordini verso sinistra, il loro valore relativo è divenuto mille volte più grande di quello che era prima; così la cifra 6 che rappresentava prima 6 millesimi, esprime ora 6 unità ecc.

Se nello stesso numero proposto si trasporta la virgola di due posti verso sinistra, si formerà il numero 43,572168 cento volte minore del proposto, perchè le cifre retrocedendo in questo caso di due posti verso destra, il loro valore relativo diventa cento volte minore di quello di prima.

§ 52. Il togliere od aggiungere zeri a destra della frazione decimale non ne cangia il valore.

Mettendo un numero qualunque di zeri alla destra di una frazione decimale, o levandoli se vi sono, non si cangia il valore della frazione; perchè i zeri aggiunti al numeratore, o da esso levati, si sottintendono anche aggiunti, o levati nel denominatore; il che ritorna al moltiplicare o dividere i due termini della frazione per uno stesso numero. Si può anche osservare, che i zeri aggiunti alla destra della frazione decimale, non mutando il luogo delle unità, nè la distanza di ciascuna cifra dalla virgola, i valori di tutte le cifre e quello del numero stesso rimangono invariati.

Così 0,45=0,450=0,4500 ecc.: quindi sarà facile il ridurre più frazioni decimali allo stesso denominatore: per questo basterà aggiungere ad alcune di esse un numero sufficiente di zeri, finchè abbiano tutte lo stesso numero di cifre decimali.

ARTICOLO IV.

Operazioni sulle frazioni decimali.

—

Addizione — Sottrazione. — Moltiplicazione. — Divisione; il dividendo e il divisore debbono avere ugual numero di cifre decimali.

—

§ 53. Addizione.

L'addizione dei numeri decimali si fa come quella dei numeri interi, scrivendo cioè i numeri in maniera, che le virgole e le unità o parti dello stesso ordine siano poste nella stessa colonna; quindi cominciando dalle parti più piccole si farà la somma di ciascheduna colonna, secondo la regola dei numeri interi: nella somma totale poi si deve porre la virgola nella stessa colonna delle altre, affinchè separi verso destra tante cifre decimali, quante sono nel numero che ne contiene di più, come si vede nei due esempi seguenti:

4,00745	
2,791	0,78345
0,942	0,82131
2,72	0,37248
10,46045	1,97724

§ 54. Sottrazione.

La sottrazione richiede la medesima disposizione dei numeri, come nell'addizione, e di più che si riducano almeno mentalmente le frazioni allo stesso denominatore; epperciò se

in uno dei due numeri non vi sono tante cifre decimali, quante sono nell'altro, al posto delle cifre decimali mancanti si sottintenderanno altrettanti zeri.

L'operazione si farà poi come nei numeri interi. Eccone due esempi :

4,8274	3,842...
2,0139	2,004554
2,8135	1,837446

§ 55. Moltiplicazione.

La moltiplicazione dei numeri decimali si fa come quella dei numeri interi, senza tener conto della virgola ; ma nel prodotto ottenuto si separeranno colla virgola verso destra tante cifre decimali, quante erano nei due fattori.

Così per moltiplicare 43,7 per 3,91, si farà la moltiplicazione di 437 per 391, e nel prodotto risultante 170867, separando colla virgola le tre ultime cifre si avrà pel vero prodotto 170,867, come si vede nell' operazione qui fatta in disteso.

```
  43,7
  3,91
 ------
   437
  39 33
 131 1
 ------
170,867
```

Per renderci ragione di questo modo di operare, si deve osservare che i due numeri proposti si possono scrivere sotto la forma di $\frac{437}{10}$ e $\frac{391}{100}$, e che per moltiplicare questi due numeri tra di loro, bisogna fare il prodotto dei due numeratori, e dividerlo pel prodotto dei due denominatori 1000; e questa divisione si fa separando colla virgola le tre ultime cifre del prodotto dei due numeratori, che rappresentano appunto i due numeri proposti considerati senza la virgola.

È d'altronde evidente, che il prodotto di decimi per centesimi deve esprimere millesimi, cioè deve contenere tre cifre decimali, come prescrive la regola.

Un ragionamento analogo serve per tutti i casi, e confermerà generalmente la regola.

Quando il prodotto dei due numeratori non contiene tante cifre quante bisogna separarne secondo la regola, allora si aggiungono alla sinistra del prodotto i zeri necessari, per poter fare la debita separazione, più ancora uno per tener il posto delle unità. Così moltiplicando 0,04 per 0,007, si troverà 28 al prodotto, e dovendo separare cinque cifre, si scriveranno alla sinistra di 28 quattro zeri, dei quali uno terrà il posto delle unità, e si avrà così 0,00028 pel vero prodotto ricercato. Operando secondo la regola, si troverà, che:

Primo. Il prodotto di 40,567 per 9,503 è eguale a 385,508201.

Secondo. Il prodotto di 2,4542 per 0,0053 è eguale a 0,01300726.

§ 56. Divisione; il dividendo e il divisore debbono avere egual numero di cifre decimali.

Primo. Se il dividendo ed il divisore hanno lo stesso numero di cifre decimali, cioè se hanno lo stesso denominatore, si toglie la virgola, e si fa la divisione come nei numeri interi: il quoziente così trovato sarà il vero quoziente ricercato.

Infatti dividere, per esempio, 12,88 per 3,22 è lo stesso che dividere $\frac{1288}{100}$ per $\frac{322}{100}$; ora per fare questa divisione si deve moltiplicare la frazione dividenda per la frazione divisore rovesciata; il che darà $\frac{1288}{100} \times \frac{100}{322}$, e togliendo il fattore 100 comune ai due termini, si avrà $\frac{1288}{322} = 4$; il che ci fa vedere, che per fare la proposta divisione, basta dividere il dividendo pel divisore, considerati ambedue senza virgola.

Si può ancora osservare, che togliendo la virgola, si moltiplica per 100 il dividendo ed il divisore, il che non cangia il

quoziente: oppure che 1288 centesimi contengono 322 centesimi lo stesso numero di volte, che 1288 unità contengono 322 unità.

Secondo. Se il dividendo ed il divisore non hanno lo stesso numero di cifre decimali, allora si debbono prima ridurre allo stesso denominatore, aggiungendo altrettanti zeri in vece delle cifre decimali mancanti all'uno dei due, il che non cangia il valore del numero decimale (§ 52); quindi togliendo la virgola, si farà la divisione come si è detto qui sopra.

Si voglia, per esempio, dividere 93,5 per 2,75; aggiungendo un zero al dividendo, e togliendo le due virgole, si dividerà 9350 per 275, e si troverà 34 per quoziente.

Quando il divisore è un numero intero, sarà più breve il dividere, secondo il modo ordinario, prima la parte intiera, e successivamente la parte decimale, ricordandosi di scrivere la virgola nel quoziente al momento di abbassare la prima cifra decimale alla destra del resto delle unità semplici. Così dividendo a questo modo 33,75 per 25, si trova subito per quoziente 1,35.

Se il divisore ha un minor numero di cifre decimali, si può togliere la virgola, il che lo renderà intero, purchè si avanzi la virgola del dividendo di tante cifre verso destra, quante erano le cifre decimali del divisore: in questa maniera si moltiplicherà il dividendo ed il divisore per uno stesso numero, il che non cangia il quoziente, e ridurrà l'operazione al caso precedente; così $\frac{130,305}{3,5}$ sarà eguale a $\frac{1303,05}{35}$; e facendo l'operazione nel modo ordinario, si troverà per quoziente 37,23.

ARTICOLO V.

Riduzione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali equivalenti, e viceversa.

Riduzione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali. — Regola generale per la riduzione, e casi in cui questa possa esattamente effettuarsi — Casi in cui la riduzione non possa esattamente effettuarsi; frazioni periodiche, periodiche semplici, periodiche miste. — Riduzioni delle frazioni decimali finite, delle periodiche semplici, e delle periodiche miste nelle frazioni ordinarie generatrici. — Grado di approssimazione; riguardo che si deve avere; quando si ommettano cifre decimali. — Trasformazione di una frazione in un'altra che abbia un dato denominatore, e che sia equivalente alla prima, o di un valore il più prossimo possibile.

---

§ 57. Riduzione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali.

È spesso utile di trasformare una frazione ordinaria in una frazione decimale equivalente.

256	13
126	19,692307
90	
120	
30	
40	
100	
9	

Sia, per esempio, da dividere 256 per 13, si troverà per quoziente intero 19 col resto 9, il che darebbe $19\frac{9}{13}$ pel quoziente totale; ma volendo ridurre la frazione $\frac{9}{13}$ in decimali, si scriverà la virgola dopo il quoziente intero 19, come si vede nell'operazione qui accanto, e si ridurrà il resto 9 in decimi, moltiplicandolo per 10, ciò che si fa aggiungendo un zero alla sua destra; si avrà così 90 decimi, che divisi per 13, danno per quoziente 6 decimi col residuo 12 decimi; riducendo in centesimi questo residuo, farà 120 centesimi, e dividendo per 13, darà 9 centesimi al quoziente col resto 3 centesimi, che si ridurranno a 30 millesimi, e daranno 2 millesimi di quoziente con 4 mille-

simi di resto; continuando ad aggiungere un zero alla destra di ciascun resto, ed a dividere per 13, si otterranno successivamente 3 diecimillesimi, 0 centomillesimi, ed alla sesta divisione, dopo la virgola, 7 milionesimi col resto 9, eguale in valore assoluto al primo resto, dal quale cominciò la riduzione in decimali.

Si noti, che in questo caso la riduzione non finisce; ma il valore del quoziente s' accosterà tanto più a quello della frazione proposta, quando si spingerà più innanzi l' operazione, cercando un maggior numero di cifre. Per esempio, con due decimali l'approssimazione sarà a meno di un centesimo, e con tre decimali sarebbe a meno di un millesimo, cioè l'errore che si commette tralasciando le cifre seguenti del quoziente, sarà minore di un millesimo.

§ 58. Regola generale per la riduzione, e casi in cui questa possa esattamente effettuarsi.

L'andamento tenuto nell'esempio precedente serve per ridurre in decimali una frazione ordinaria qualunque; poichè la parte 0,692307, scritta dopo il quoziente intero 19, rappresenta il valore della frazione $\frac{9}{13}$ a meno di un milionesimo. Si potrà dunque stabilire la seguente regola generale:

Per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, si scriverà al quoziente uno zero colla virgola a destra, per tenere il posto delle unità: quindi si aggiugnerà un zero alla destra del numeratore, e si dividerà pel denominatore, il quoziente esprimerà dei decimi; aggiungendo un altro zero al resto, e dividendo si avranno centesimi al quoziente; e si continuerà così, finchè siasi ottenuto un sufficiente numero di decimali secondo l' approssimazione che si desidera, o come richiede lo stato della questione, e la grandezza dell'unità principale.

Può accadere che, dopo un certo numero di divisioni, il resto sia zero; allora si avrà un quoziente esatto, e la frazione

proposta potrà ridursi esattamente in decimali. Così, operando secondo la regola, si troverà che $\frac{2}{5}$ sono uguali a 0,4; $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{5}{8}=0{,}625$; $\frac{13}{20}=0{,}65$; $\frac{47}{125}$ 0,376.

La riduzione in decimali si farà esattamente, ogni volta che la frazione ordinaria ridotta a minimi termini avrà un denominatore formato dai soli fattori primi 2 e 5, come appunto succede negli esempi di riduzioni esatte citate qui sopra. La spiegazione di questo fatto dipende dalla natura della divisione, e dal modo di operare la riduzione; in fatti si sa (§ 33), che la divisione non riesce, esattamente, se non quando il dividendo contiene i fattori primi del divisore ripetuti tante volte, quante lo sono nel divisore stesso; ora nel fare la riduzione si aggiugne un zero alla destra del numeratore e dei successivi resti, e si divide il risultato pel denominatore; il che viene allo stesso che aggiugnere tutti questi zeri al numeratore, e calarli uno per volta alla destra del resto, come si pratica nella divisione ordinaria; ma coll' aggiugnere uno, due, tre ecc. zeri al dividendo, esso viene moltiplicato una, due, tre volte per 10, cioè per 2 e per 5, onde s'introducono questi fattori tante volte, quanti sono essi contenuti nel divisore; epperò la divisione deve compiersi esattamente.

§ 59. Casi in cui la riduzione non possa esattamente effettuarsi; frazioni periodiche; periodiche semplici; periodiche miste.

Qualunque frazione ridotta a minimi termini, il cui denominatore contenga un fattore primo diverso dal 2 e 5, non potrà convertirsi esattamente in decimali, comunque si continui l'operazione; perchè il denominatore contenendo un fattore primo diverso dal 2 e 5, non potrà mai dividere esattamente i numeri 10, 100, 1000 ecc., nè per conseguenza alcun prodotto del numeratore per questi numeri. Ma in ogni divisione tutti i resti essendo minori del divisore, il numero de' resti disuguali non può eccedere

quello delle unità contenute nel divisore meno una; e quindi dopo un pari numero di divisioni al più, si ricadrà sopra uno dei resti già ottenuti. Soventi volte, come nell'esempio del § 57, si ricade sopra uno de' resti precedenti, prima che sieno trovate tante cifre del quoziente, quante sono le unità del divisore meno una. Aggiugnendo un zero alla destra del resto ripetuto, si avrà un dividendo parziale e quindi un quoziente, ed un resto parimente ripetuto: di modo che i dividendi parziali, e le cifre del quoziente ritorneranno nello stesso ordine, e si ripeteranno periodicamente per gruppi simili indefinitamente.

Così $\frac{5}{7}=0,714285714285\ldots$ come si può vedere nell'operazione seguente:

```
50 | 7
10 | 0,714285...
 30
  20
   60
    40
     5
```

Così $\frac{38}{111}=0,342342342\ldots$

$\frac{13}{44}=0,2954545\ldots$

Le frazioni decimali, nelle quali le medesime cifre si ripetono continuamente nello stesso ordine, si chiamano *frazioni periodiche*; la parte che si ripete si chiama il *periodo*, che può essere composto di un numero qualunque di cifre. Così nella prima frazione periodica equivalente a $\frac{5}{7}$, il periodo comincia subito dopo la virgola, e si ripete dopo la sesta cifra decimale, cioè di sei in sei cifre; nella seconda il periodo comincia pure dalla prima cifra decimale, e si ripete di tre in tre cifre; nella

terza frazione le due prime cifre non fanno parte del periodo, che comincia solamente dalla terza cifra, e si ripete di due in due cifre. Quest'ultima frazione si chiama *periodica mista*, per distinguerla dalle altre, il cui periodo comincia dalla prima cifra decimale, e che si chiamano perciò *periodiche semplici*.

§ 60. Riduzione delle frazioni decimali finite; delle periodiche semplici, e delle periodiche miste nelle frazioni ordinarie generatrici.

Si è veduto che una frazione ordinaria qualunque può sempre svilupparsi in frazione decimale *finita o periodica:* reciprocamente una frazione decimale finita o periodica potrà sempre convertirsi nella frazione ordinaria dalla quale deriva, e che si chiama perciò la sua *generatrice*.

Per questo bisogna distinguere tre casi: cioè la frazione decimale, che si vuole convertire in frazione ordinaria, può essere *finita, periodica, semplice,* oppure *periodica mista.*

Primo. Quando la frazione decimale è *finita,* si trova facilmente la sua generatrice, scrivendola sotto la forma ordinaria, e facendo quindi la riduzione a minimi termini, se havvi luogo.

Così $0{,}625=\frac{625}{1000}$, e dividendo i due termini per 125, si troverà $\frac{5}{8}$.

Secondo. Si voglia convertire in ordinaria la frazione periodica semplice 0,2172172l7. . . .

Moltiplicandola tante volte per 10 quante sono le cifre del periodo, il che si fa trasportando la virgola di un periodo intero verso destra, il risultato 217,217217 . . . esprime evidentemente mille volte il valore della proposta, e contiene ancora le stesse cifre decimali; dunque si avrà $1000 \times 0{,}217217 \ldots\ldots = 217{,}217217 \ldots\ldots$; sottraendo d'ambe le parti una volta

0,217217 . . ., resterà $999 \times 0,217217 \ldots = 217$; e dividendo d'ambe le parti per 999, risulterà $0,217217 \ldots = \frac{217}{999}$

Dal che si vede, che *una frazione decimale periodica semplice è uguale ad una frazione ordinaria, che ha per numeratore le stesse cifre del periodo, e per denominatore tante cifre 9, quante sono le cifre del periodo.*

Così 0,351351 . . . sarà eguale a $\frac{351}{999}$ che si riduce a $\frac{13}{37}$, dividendo i due termini prima per 9, poi ancora per 3.

Parimente 15,232323 . . . . sarà lo stesso che $15 + \frac{23}{99}$; e la frazione 0,03960396. . . . sarà eguale a $\frac{0396}{9999}$, o più semplicemente $\frac{396}{9999} = \frac{44}{1111} = \frac{4}{101}$, dividendo i due termini prima per 9, poi per 11.

Terzo. Si debba ora trasformare in frazione ordinaria una frazione periodica mista, per esempio 0,123171717 . . : moltiplicandola, e dividendola nello stesso tempo tante volte per 10, quante sono le cifre non periodiche, la frazione, senza cangiare di valore, prenderà la forma $\frac{123,171717\ldots}{1000}$, il cui numeratore, secondo la regola precedente, equivale a $123 + \frac{17}{99} = \frac{123 \times 99 + 17}{99}$; e dividendo pel denominatore 1000, risulterà

$$0,1231717 \ldots = \frac{123 \times 99 + 17}{99000} = \frac{12194}{99000}.$$

Dal che si vede, che *una frazione periodica mista è uguale ad una frazione ordinaria, il cui numeratore è la somma del periodo col prodotto delle cifre non periodiche per tanti 9, quante sono le cifre periodiche; ed il denominatore è formato da tanti 9, quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri, quante sono le cifre non periodiche.*

La frazione ordinaria così formata potrà poi ridursi alla sua più semplice espressione: così

$$0,278181\ldots = \frac{27 \times 99 + 81}{9900} = \frac{153}{550},$$

fatte le indicate operazioni, e le opportune riduzioni.

§ 61. Grado di approssimazione; riguardo che si deve avere quando si ommettano cifre decimali.

Ogniqualvolta si fa uso di frazioni decimali, la natura stessa della questione determina il grado dell'approssimazione che si dee ricercare, e quindi ancora il numero delle cifre decimali che si debbono conservare: l'errore che si commette tralasciando tutte quelle che seguono, da qualsivoglia ordine in là, è sempre minore di una unità di quell'ordine medesimo: l'errore sarà minore della metà di quest'unità, se si farà uso della regola seguente.

1.° Se la prima delle cifre che si vogliono ommettere è minore di 5, si tralascierà con tutte le altre a destra, conservando le cifre poste a sinistra: 2.° se la prima cifra è più grande di 5, o essendo eguale a 5, sia seguita da altre cifre significative, si accrescerà di un'unità l'ultima cifra conservata: 3.° se la prima cifra essendo 5, non è seguita da altre cifre significative, allora si può indifferentemente accrescere, o non accrescere di uno l'ultima cifra conservata.

Nel primo caso il valore approssimativo è minore, e nel secondo è maggiore del valore vero; ma l'errore è nei due casi minore di una mezza unità dell'ultimo ordine conservato: nel terzo caso l'errore in più o in meno è giustamente uguale ad una mezza unità dell'ultimo ordine conservato.

§ 62. Trasformazione di una frazione in un'altra che abbia un dato denominatore, e che sia equivalente alla prima, o di un valore il più prossimo possibile.

La riduzione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali non è che un caso particolare di un altro problema più generale, che si può enunciare nella maniera seguente:

Data una frazione qualunque, trasformarla in un'altra che abbia un dato denominatore, e che sia equivalente, o almeno di un valore il più prossimo possibile a quello della proposta.

Per questo si moltiplicherà il numeratore della prima frazione data pel denominatore che si vuole dare alla seconda, e dividendo il prodotto pel denominatore della prima, il quoziente rappresenterà il numeratore della frazione trasformata.

In effetto sia, per esempio, da ridurre $\frac{3}{4}$ in *dodicesimi:* è chiaro che si avrà il numero di *dodicesimi* corrispondente a $\frac{3}{4}$, cercando quante volte $\frac{1}{12}$ è contenuto in $\frac{3}{4}$, cioè dividendo $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{12}$; il che darà per quoziente $\frac{3\times12}{4}=9$; la frazione $\frac{3}{4}$ vale dunque $\frac{9}{12}$, come già si sapeva.

Parimente $\frac{7}{8}$ ridotti in *ventiquattresimi*, danno $\frac{21}{24}$; e $\frac{4}{7}$ ridotti in *venticinquesimi*, danno $\frac{14}{25}+\frac{2}{7}$ di un *venticinquesimo*.

Queste trasformazioni s'incontrano sovente nella pratica, e principalmente nel calcolo dei numeri concreti o complessi, come si avrà occasione di vedere in appresso; ma ciascuno potrà facilmente accorgersi, che esse riescono solamente esatte,

quando il denominatore della frazione che si dee trasformare, supposta ridotta a minimi termini, è un divisore esatto del denominatore della trasformata. In tutti gli altri casi, il valore della trasformata è solamente approssimativo; e per renderlo compito, bisognerà ancora aggiugnervi una frazione di frazione che ridotta, e riferita all'unità principale, ha per numeratore il resto della divisione, e per denominatore il prodotto dei due denominatori della frazione proposta e della trasformata.

CAPO V.

Numeri complessi.

—

ARTICOLO I.

—

Numero complesso, incomplesso. — Divisioni e suddivisioni delle unità principali di pesi e misure antiche di Piemonte. — Come un numero complesso possa sempre convertirsi in frazione dell'unità principale e viceversa.

—

§ 63. Numero complesso, incomplesso.

Un numero concreto dicesi *complesso*, quando è composto di più parti riferite rispettivamente ad unità diverse o piuttosto a diverse suddivisioni di una stessa unità. All'opposto, se il numero si riferisce ad una sola specie d'unità, si chiama *incomplesso*. Così 8 lire 7 soldi 6 danari; 4 trab. 5 piedi 8 oncie ecc. sono numeri complessi; ed 8 lire, oppure 4 trabucchi sono numeri incomplessi.

Le quantità, che soglionsi più comunemente valutare con numeri complessi, sono le *monete*, i *pesi* delle merci, le *distanze*, le *superficie*, i *volumi* e il *tempo*.

Il calcolo delle frazioni riuscendo malagevole specialmente negli usi civili, si è pensato di dividere e suddividere le unità primitive di più frequente uso in un certo numero di parti eguali, e di considerare queste parti come altrettante unità di diversa specie. Di qui nacquero generalmente i numeri complessi; e prima dell'introduzione del nuovo sistema metrico decimale, i diversi sistemi di pesi e misure in uso presso le varie nazioni d'Europa erano tutti espressi in numeri complessi.

§ 64. Divisione e suddivisione delle unità principali di pesi e misure antiche di Piemonte.

Per poter applicare le quattro operazioni fondamentali dell'Aritmetica al calcolo dei numeri complessi, è necessario conoscere prima la relazione, che esiste tra le diverse unità, o parti, che compongono questi numeri. Perciò si accenneranno rapidamente le divisioni e suddivisioni delle principali unità di pesi e misure antiche di Piemonte.

1.° Per le *misure di valore* o *monete*, l'unità principale è la lira, che si divide in 20 soldi, ed il soldo in 12 denari. Così il soldo è $\frac{1}{20}$ della lira; ed il denaro è $\frac{1}{12}$ del soldo, oppure $\frac{1}{240}$ della lira. Al presente la lira si divide in 100 centesimi.

2.° Pei *pesi*, l'unità è il rubbo, che si divide in 25 libbre, la libbra in 12 oncie, l'oncia in 8 ottavi, l'ottavo in 3 danari, il danaro in 24 grani, ed il grano in 24 granotti. Così la libbra è $\frac{1}{25}$ del rubbo, l'oncia è $\frac{1}{12}$ della libbra, oppure $\frac{1}{300}$ del rubbo ecc.'per pesare i metalli fini e le pietre preziose, l'unità è il marco, che si divide in 8 oncie, l'oncia in 144 carati, ed il carato in 4 grani.

3.° Per le *distanze o lunghezze*, l'unità è il trabucco, che si divide in 6 piedi (detti liprandi), il piede si divide in 12 oncie, l'oncia in 12 punti, ed il punto in 12 atomi.

Si prende ancora talvolta per unità di lunghezza la tesa di 40 oncie, che si divide in 5 piedi (detti manuali) o di 8 oncie.

Per le misure di tele, panni, ecc. l'unità è il raso, che vale 14 oncie del piede liprando, e si divide in metà, terzi, quarti, sesti, ottavi, ecc.

Per le distanze itinerarie, l'unità è il miglio che vale 800 trabucchi.

4.° Per le *superficie* poco estese, e specialmente per quelle delle abitazioni, l'unità è il trabucco quadrato. Il trabucco qua-

drato è un quadro lungo e largo un trabucco ; e si divide parimente, come il trabucco lineare, in piedi, oncie, punti ed atomi di trabucco quadrato.

Per le *superficie* agrarie o dei terreni, l'unità è la giornata, che vale 100 tavole. La tavola è un quadro di terreno lungo e largo 2 trabucchi, e si divide in 12 piedi di tavola, ed il piede in 12 oncie ecc. Il piede, e l'oncia di tavola sono quadrilunghi della lunghezza della tavola, cioè di due trabucchi e della larghezza rispettivamente di un piede o di un'oncia.

5.° Pei *volumi*, l'unità varia secondo la natura delle quantità, di cui si vuol misurare i volumi. Così per la misura dei grandi solidi, come terrapieni, e scavamenti, l'unità è il trabucco cubo. Il trabucco cubo ha la forma di un *dado* lungo, largo ed alto un trabucco, e si divide in 6 piedi, ed il piede in 12 oncie di trabucco cubo.

Per la misura dei muri delle fabbriche, l'unità è il trabucco detto *camerale*, rappresentato da un pezzo di muro avente le due faccie laterali ed opposte di un trabucco quadrato, e la grossezza di 10 oncie. Il trabucco camerale si divide anche in piedi, oncie ecc. di trabucco camerale.

Per le misure del fieno, l'unità è la tesa cuba, che si divide in 5 piedi, ed il piede in 8 oncie di tesa cuba ecc.

Pei grani, ed altre materie secche, l'unità è l'emina, che è della capacità di oncie cube $293\frac{1}{8}$, e si divide in 8 coppi, ed il coppo in 24 cucchiari.

Pei liquidi, l'unità è la brenta, che è della capacità di 628 oncie cube, e si divide in 36 pinte, e la pinta in 4 quartini.

6.° Per la *misura del tempo*, l'unità principale è l'anno; l'anno civile comune è di 365 giorni; ed il bisestile di 366; il giorno si divide in 24 ore, l'ora in 60 minuti, il minuto in 60 secondi ecc.

§ 65. Come un numero complesso possa sempre convertirsi in frazione dell'unità principale, e viceversa.

Dalle accennate divisioni e suddivisioni delle principali unità di misure in altre unità inferiori, o di minor valore, apparisce chiaramente, che un numero qualunque complesso può sempre convertirsi in frazione dell'unità principale, e reciprocamente, che un'espressione frazionaria qualunque di un' unità principale può svilupparsi in un numero complesso equivalente.

Sia, per esempio, da ridurre 5 trabucchi, 4 piedi, 6 oncie in frazione del trabucco: sapendo che il trabucco vale 6 piedi, e che il piede vale 12 oncie, basterà moltiplicare 5 per 6, ed aggiungere al prodotto 4, il che darà 34 piedi; si moltiplicherà di nuovo 34 per 12, ed aggiungendo al prodotto 6, si otterrà 414 oncie, ossia $\frac{414}{72}$ del trabucco, giacchè un' oncia vale $\frac{1}{72}$ del trabucco. Questo solo esempio mostra bastantemente come si debba operare per ridurre gli altri numeri complessi in frazione della loro unità principale. Reciprocamente sia il numero frazionario $\frac{199}{8}$ di lira da ridurre in un numero complesso equivalente: si dividerà 199 per 8, il che darà per quoziente 24 lire col resto 7 lire. Si moltiplicherà il resto 7 per 20; il che darà 140 soldi, e dividendo per 8 si otterrà per quoziente 17 soldi col residuo 4 soldi; si moltiplicherà il resto 4 per 12; il che darà 48 denari, e dividendo per 8, si avrà per quoziente 6 denari: di modo che il numero frazionario $\frac{199}{8}$ di lira è equivalente a 24 lire, 17 soldi, 6 denari.

Con una maniera analoga si convertiranno le frazioni di altre unità concrete nei numeri complessi corrispondenti.

Col mezzo delle due trasformazioni precedenti, le quattro operazioni dell'Aritmetica sopra i numeri complessi possono ri-

condursi alle regole ordinarie del calcolo delle frazioni: per questo basterebbe convertire primieramente i numeri complessi proposti, in frazioni delle loro unità principali; effettuare poscia il calcolo secondo le regole delle frazioni; e ridurre di nuovo in numeri complessi i risultati frazionarii ottenuti.

Ma questa maniera di operare sarebbe generalmente troppo lunga; il metodo che viene esposto nel seguente articolo è più diretto e più spedito.

ARTICOLO II.

Operazione dei numeri complessi.

Addizione. — Sottrazione. — Moltiplicazione, due casi: 1° moltiplicando complesso, e moltiplicatore incomplesso; 2° entrambi i fattori complessi. Nell'operazione, il moltiplicatore deve sempre considerarsi come un numero astratto. — Divisione, due casi: 1° dividendo e divisore di specie diversa; 2° dividendo e divisore della stessa specie riguardo all'unità principale. — Natura del quoziente; verificazione della moltiplicazione e divisione. — Conversione di un numero complesso in decimali e viceversa.

---

§ 66. Addizione

L'addizione dei numeri complessi si fa a un dipresso come quella dei numeri interi: si scrivono i numeri proposti gli uni sotto gli altri, in modo che le unità della medesima specie siano nella stessa colonna; si comincia a sommare le unità di minor valore, e se la loro somma non compone un'unità della specie immediatamente superiore, si scrive sotto la colonna sommata; ma se la somma raccolta è maggiore di quanto bisogna per comporre una o più unità dell'ordine superiore più vicino, si scrive il solo resto sotto la colonna, e si aggiunge alla somma della colonna seguente l'unità, o le unità che risultano dalla precedente, e così di seguito.

I due esempi seguenti metteranno in chiaro la regola.

1° *Esempio*

lire	soldi	denari
322	17	5
43	11	7
7	8	4
18	2	7
Somma 391 ll.	19 ss.	11 dd.

2° *Esempio*

trab.	piedi	onc.
154	3	7
23	2	8
132	5	10
0	2	7
311 tr.	2 p.	8 onc.

Nel primo esempio la somma dei denari è 23, che fa un soldo e 11 denari; si scrive 11 e si porta 1 soldo alla colonna dei soldi, la quale sommata darà 39 soldi, cioè una lira e 19 soldi, si scrive 19 soldi, e si porta 1 lira alla colonna delle lire, la quale si somma secondo il solito.

Nel secondo esempio la somma delle oncie è 32, cioè 2 piedi e 8 oncie; si scrive 8 sotto le oncie, e si porta 2 alla colonna dei piedi, la quale darà per somma 14 piedi, cioè 2 trabucchi e 2 piedi; si scrive 2 sotto i piedi, e si porta 2 alla colonna dei trabucchi, della quale si fa la somma nella maniera ordinaria.

§ 67. Sottrazione.

Si scrive il numero minore sotto il maggiore, avvertendo di collocare le unità della medesima specie le une sotto le altre nella stessa colonna; s'incomincia l'operazione dalle unità più piccole, si sottrae il numero inferiore dal superiore, e quando questa sottrazione è possibile, si scrive il resto al di sotto, e si continua medesimamente sulle altre colonne: qualora il numero inferiore sia più grande del superiore, si renderà la sottrazione possibile col prendere in prestito sulla specie superiore più vicina un'unità; la quale si ridurrà nel corrispondente numero d'unità inferiori da aggiungersi a quelle, sulle quali si deve operare; ma in questo caso bisogna ricordarsi di diminuire di un'unità il numero, sul quale si è fatto il prestito.

Primo esempio.

Dal numero 349 lire, 17 soldi, 4 denari, sottrarre 127 lire, 8 soldi, 7 denari.

	lire	soldi	denari
	349	17	4
	127	8	7
Resto	222ll.	8ss.	9dd.

Non potendo sottrarre 7 denari da 4, si prende sui 17 soldi un'unità, che vale 12 denari, i quali aggiunti a 4 danno 16 denari, e si dirà da 16 levando 7 resta 9, che si scrive sotto i denari; passando alla colonna dei soldi, si dirà da 16 levando 8 resta 8, che si scrive sotto i soldi: finalmente sottraendo 127 da 349 resta 222; il resto totale sarà dunque 222 lire, 8 soldi, 9 denari.

Secondo esempio.

Dal numero 15 rubbi, 12 libbre, 7 oncie, 5 ottavi, sottrarre 9 rubbi, 20 libbre, 10 oncie, 7 ottavi.

	rub.	lib.	onc.	ott.
	15	12	7	5
	9	20	10	7
Resto	5r.	16lib.	8on.	6ott.

da 5 ottavi levarne 7 non si può; dunque si prenderà sul 7 un'oncia, che vale 8 ottavi, più 5 fanno 13 ottavi, dai quali levando 7 restano 6; parimente non potendosi da 6 oncie levarne 10, si prenderà sul 12 una libbra, che vale 12 oncie, più 6 fanno 18; da 18 levando 10 restano 8 oncie: passando alle libbre, si prenderà sul 15 un rubbo, che vale 25 libbre, le quali aggiunte alle 11 fanno 36 libbre, e si dirà da 36 levando 20 restano 16 libbre: finalmente da 14 rubbi levandone 9, restano 5; il resto totale sarà dunque 5 rubbi, 16 libbre,

8 oncie, 6 ottavi; come si può verificare facendo la somma del resto col sottraendo, ed osservando che il risultato è eguale al minuendo.

§ 68. Moltiplicazione, due casi: 1° moltiplicando complesso, e moltiplicatore incomplesso; 2° entrambi i fattori complessi.

Per maggiore chiarezza si distingueranno due casi: il primo comprende le moltiplicazioni, in cui il moltiplicando solo è complesso, ed il moltiplicatore è incomplesso: nel secondo il moltiplicando può essere complesso o incomplesso, ed il moltiplicatore è complesso.

Primo caso. Si domanda il prezzo di 7 rasi di stoffa in ragione di 12 lire, 17 soldi e 6 denari per raso.

È chiaro che basterà ripetere 7 volte il prezzo di un raso, cioè moltiplicare 12 lire, 17 soldi, 6 denari per 7 considerato come numero astratto.

	lire	soldi	denari
moltiplicando	12	17	6
moltiplicatore	7		
Prodotto	90ll.	2ss.	6dd.

Per questo si moltiplicheranno tutte le parti del moltiplicando cominciando dalle più piccole, pel moltiplicatore 7, avvertendo di ritenere le unità degli ordini superiori provegnenti dai prodotti delle unità inferiori.

Si dirà dunque 7 volte 6 denari fanno 42 denari, ossia 3 soldi e 6 denari, si scrive 6 sotto i denari, e si ritengono 3 soldi per aggiungerli al prodotto dei soldi; si dirà quindi 7 volte 17 soldi fanno 119, più 3 ritenuti fanno 122 soldi, ossia 6 lire e 2 soldi, si scriverà 2 sotto i soldi, e si porta 6 al prodotto delle lire; finalmente si dirà 7 volte 12 lire fanno 84 lire, più 6 ritenute fanno 90 lire, e si scriverà 90 sotto le lire. Così il prezzo dei 7 rasi sarà di 90 lire, 2 soldi, 6 denari.

Se il moltiplicatore fosse un numero di più cifre, non si potrebbe facilmente determinare a memoria i soldi provegnenti dal prodotto dei denari, e le lire provegnenti da quello dei soldi, e per ottenerli, bisognerebbe fare a parte le moltiplicazioni, e le successive divisioni per convertire le unità inferiori nelle unità superiori, il che richiederebbe un calcolo assai lungo. In questo caso, per abbreviare l'operazione, sarà meglio cominciarla dalla sinistra, e moltiplicare prima le unità principali del moltiplicando pel moltiplicatore, e riguardo alla moltiplicazione delle suddivisioni, si seguiterà il metodo delle così dette parti aliquote, come si vedrà nell' esempio seguente.

Si dimanda il prezzo di 34 misure di una data mercanzia, supponendo, che una misura costi 25 lire, 16 soldi, 6 danari.

Per questo bisogna moltiplicare il prezzo di una misura

cioè	25ll.	16ss.	6dd.
per	34		
	100		
	75		
per 10s.	17		
5	8	10s.	
1	1	14	
6d.	0	17	
	878ll.	1ss.	0dd.

Si moltiplicherà prima 25 lire per 34 secondo la regola ordinaria, poi per avere il prodotto di 16 soldi per 34, si considera che una lira moltiplicata per 34 darebbe 34 lire di prodotto; e scomponendo i 16 soldi in 10 soldi più 5 soldi più 1 soldo, pel prodotto di 10 soldi per 34, si prenderà la metà di 34 lire, e si scriverà 17 nella colonna delle lire; pel prodotto di 5 soldi si prenderà la metà del prodotto precedente, e si scriverà 8 lire 10 soldi; pel prodotto di 1 soldo che è la quinta parte di 5 soldi, si prenderà il quinto del prodotto precedente e si scriverà 1 lira 14 soldi; finalmente per 6 danari metà di 1 soldo, si prenderà

la metà dell'ultimo prodotto, e si scriverà 17 nella colonna dei soldi. Facendo la somma di tutti i prodotti parziali, si troverà 878 lire, 1 soldo pel prezzo delle 34 misure.

Sia ancora, per esempio, da moltiplicare

		$84^{\text{trab.}}$	$4^{\text{p.}}$	$7^{\text{onc.}}$	6^{punti}
per	. . . . .	47			
		588			
		336			
per	$3^{\text{p.}}$	23	$3^{\text{p.}}$		
	1	7	5		
	$6^{\text{on.}}$	3	5	$6^{\text{on.}}$	
	1	0	3	11	
	6^{punti}	0	1	11	6^{punti}
		$3984^{\text{trab.}}$	$1^{\text{p.}}$	$4^{\text{on.}}$	6^{punti}

Dopo avere moltiplicato al solito gli 84 trabucchi per 47, si scompongono i 4 piedi in 3 piedi più un piede; e siccome 1 trabucco moltiplicato per 47 darebbe 47 trabucchi; 3 piedi, metà del trabucco, daranno al prodotto la metà di 47 trabucchi, cioè 23 trabucchi 3 piedi, e pel piede restante, che è la terza parte di tre piedi, si prenderà il terzo del prodotto di 3 piedi, cioè 7 trabucchi, 5 piedi; scomponendo parimente le 7 oncie in 6 oncie più 1 oncia, per le 6 oncie, metà del piede, si prenderà la metà del prodotto precedente, e si scriverà 3 trabucchi, 5 piedi, 6 oncie; per 1 oncia restante si prenderà il sesto del prodotto di 6 oncie, e si scriverà 3 piedi, 11 oncie; finalmente per 6 punti che fanno la metà di un'oncia, si prenderà la metà del prodotto precedente e si scriverà 1 piede, 11 oncie, 6 punti; facendo la somma si troverà pel prodotto totale 3984 trabucchi, 1 piede, 4 oncie, 6 punti.

Secondo caso. Quando il moltiplicatore è anche complesso, si comincerà a moltiplicare tutto il moltiplicando per gli interi del moltiplicatore, secondo la regola precedente; quindi si scomporranno le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote o

dell'unità principale, oppure le une delle altre, e si prenderanno dal moltiplicando o dai prodotti derivanti le convenienti parti indicate dalle parti aliquote del moltiplicatore.

Primo esempio. Si debba trovare il prezzo di 27 rasi e $\frac{7}{8}$ di una data stoffa, sapendo che un raso costa 18 lire, 17 soldi, 6 denari.

È chiaro che bisogna moltiplicare il prezzo di un raso, cioè 18 lire, 17 soldi, 6 denari prima per 27 e poi ancora per $\frac{7}{8}$.

	$18^{ll.}$	$17^{ss.}$	$6^{dd.}$
	$27^{rub.}$	$\frac{7}{8}.$	
	126		
	36		
per $10^{ss.}$	13	$10^{ss.}$	
5	6	15	
2 $6^{d.}$	3	7	$6^{dd.}$
$\frac{4}{8}$	9	8	9
$\frac{2}{8}$	4	14	$4\ \frac{1}{2}$
$\frac{1}{8}$	2	7	$2\ \frac{1}{4}$
	$526^{ll.}$	$2^{ss.}$	$9^{dd.}\frac{3}{4}$

La prima moltiplicazione per 27 si fa come negli esempi precedenti, e si ottengono così i cinque primi prodotti parziali; riguardo alla seconda moltiplicazione per $\frac{7}{8}$ si scompongono i $\frac{7}{8}$ in $\frac{4}{8}$, che fanno la metà del raso, più $\frac{2}{8}$, che fanno la metà

della metà, più $\frac{1}{8}$ che è la metà di $\frac{2}{8}$; e pei $\frac{4}{8}$ si prende la metà di tutto il moltiplicando, che rappresenta il prezzo di un raso, e si scrive nelle corrispondenti colonne 9 lire, 8 soldi, 9 denari; pei $\frac{2}{8}$ si prende la metà del prodotto precedente, e si scrive 4 lire, 14 soldi, 4 denari $\frac{1}{2}$, finalmente per $\frac{1}{8}$ si prenderà la metà dell'ultimo prodotto, cioè 2 lire, 7 soldi, 2 denari $\frac{1}{4}$. Facendo la somma di tutti i prodotti parziali, si troverà 526 lire, 2 soldi, 9 denari $\frac{3}{4}$, pel dimandato prezzo dei 27 rasi $\frac{7}{8}$.

Secondo esempio. Determinare il prezzo di 15 libbre, 9 oncie, 6 ottavi di argento, supponendo che la libbra costi 79 lire, 17 soldi, 9 denari.

Si moltiplicherà . .	79ll.	17ss.	9dd.	
per	15llb.	9on.	6ott.	
	395			
	79			
per 10 . .	7	10s		
5 . .	3	15		
1 . .	0	15		
1 . .	0	15		
6d . .	0	7	6d	
3 . .	0	3	9	
6on. .	39	18	10	$\frac{1}{2}$
3 . .	19	19	5	$\frac{1}{4}$
6ott. .	4	19	10	$\frac{5}{16}$
	1263ll.	4ss.	5dd.	$\frac{1}{16}$

La moltiplicazione di tutto il moltiplicando per 15 dà gli otto primi prodotti parziali; le 9 oncie si scompongono in 6 oncie più 3 oncie; per le 6 oncie si prende la metà di tutto il moltiplicando, e per le tre oncie si prende la metà del prodotto precedente; finalmente pei 6 ottavi, che fanno la quarta parte di 3 oncie, si prenderà il quarto di quest'ultimo prodotto. Facendo la somma si troverà 1263 lire, 4 soldi, 5 denari $\frac{1}{16}$ pel ricercato prezzo.

Terzo esempio. Con una lira si fece eseguire 24 trabucchi, 4 piedi. 6 oncie di un dato lavoro; quanti trabucchi si faranno eseguire con 18 lire, 17 soldi, 6 denari: è chiaro che per ottenere il ricercato numero di trabucchi, bisogna moltiplicare 24 trabucchi, 4 piedi, 6 oncie per 18 lire, 17 soldi, 6 denari, considerato come numero astratto.

		$24^{trab.}$	$4^{p.}$	$6^{onc.}$	
		$18^{ll.}$	$17^{ss.}$	$6^{dd.}$	
		$192^{trab.}$			
		24			
per $3^{p.}$		9			
1	$6^{on.}$	4	$3^{p.}$		
$10^{s.}$		12	2	$3^{on.}$	
5		6	1	1	$6^{pun.}$
2	$6^{d.}$	3	0	6	9
		$467^{tr.}$	$0^{p.}$	$11^{on.}$	$5^{pun.}$

I riferiti esempi basteranno a far conoscere l'andamento da seguitare in tutti gli altri casi, e per qualunque specie di numeri complessi.

§ 60. Il moltiplicatore nell'operazione deve sempre considerarsi come numero astratto.

Si noti generalmente, che quando si applica la moltiplicazione ai numeri concreti, il moltiplicatore (quantunque nel quesito sia rappresentato da un numero concreto) nel fare l'operazione deve sempre considerarsi come un numero astratto, indicante quante volte si deve ripetere il moltiplicando, o quale parte debbasi prenderne; il prodotto poi è sempre della stessa natura del moltiplicando. Quindi si potrà facilmente distinguere quale dei due fattori di una moltiplicazione debbasi prendere per moltiplicando; per questo basta ritenere che il moltiplicando è della stessa natura del prodotto, e che la natura del prodotto è sempre bastantemente indicata dall'enunciato del quesito.

Può anche accadere che i due fattori di una moltiplicazione siano ambedue numeri concreti della stessa specie; come quando avviene di dover moltiplicare un numero di lire, soldi e denari per un altro numero di lire, soldi e denari; oppure un numero di trabucchi, piedi e oncie per un altro numero di trabucchi, piedi e oncie ecc.; in questo caso per fare l'operazione, si considera indifferentemente uno dei due fattori come un numero astratto e si ripete l'altro fattore tante volte quante sono le unità e parti d'unità del fattore considerato astratto; non si darà per ora alcuno esempio di queste moltiplicazioni, perchè si avrà occasione d' incontrarne in appresso; del resto le condizioni delle questioni relative a questo caso dichiareranno manifestamente la regola del calcolo, e la natura del prodotto.

§ 70. Divisione, due casi: 1° dividendo e divisore di specie diversa; 2° dividendo e divisore della stessa specie riguardo all'unità principale.

Riguardo alla divisione dei numeri complessi, si distinguono anche due casi principali, secondo che il dividendo, ed il divisore sono di diversa specie, o della stessa specie.

Primo caso. Quando il dividendo ed il divisore sono di specie diversa, può darsi che il divisore sia *incomplesso*, oppure *complesso*.

1° *Se il divisore è incomplesso, si considera come un numero astratto, e cominciando dalle unità più grandi, si dividono successivamente le singole parti del dividendo pel divisore, riducendo i resti di ciascuna divisione nelle unità immediatamente inferiori, alle quali si uniscono quelle della stessa specie, che possono trovarsi nel dividendo proposto; il quoziente sarà della stessa natura del dividendo.*

2° *Se il divisore è complesso, bisogna convertirlo* (§ 65) *in un solo numero frazionario della sua unità principale; moltiplicare quindi il dividendo pel denominatore della frazione divisore, e dividere il prodotto pel numeratore; il quoziente sarà anche della stessa natura del dividendo.*

Primo esempio.

Si dimanda il prezzo del trabucco camerale di muro, sapendo che 568 trabucchi costarono 25470 lire, 1 soldo, 4 denari.

Se si conoscesse il prezzo del trabucco, moltiplicandolo per 568 dovrebbe dare al prodotto 25470 lire, 1 soldo, 4 denari; bisognerà dunque dividere il prezzo totale pel fattore conosciuto 568, ed il quoziente rappresenterà l'altro fattore, che sarà il prezzo del trabucco.

```
25470ll. 1s. 4dd.  | 568
 2750              44ll. 16ss. 10dd.
  478
   20
 ----
 9561s
 3881
   473
    12
  ----
  5680
   .00
```

Dividendo le 25470 lire per 568, si avrà per quoziente 44 lire e per resto 478 lire; si riduce questo resto in soldi moltiplicandolo per 20 e si aggiunge al prodotto il soldo del dividendo, il che dà 9561 soldi, che divisi per 568 danno per quoziente 16 soldi, e per resto 473 soldi che si moltiplicano per 12 per ridurli in denari; ed aggiungendo al prodotto i 4 denari del dividendo, si troverà 5680 denari che divisi parimente pel 568 danno 10 denari per quoziente esatto; dunque il quoziente totale ossia il prezzo del trabucco di muro è di 44 lire, 16 soldi, 10 denari.

Secondo esempio.

23 Rubbi, 12 libbre, 6 oncie di una data mercanzia costano 301 lire, 11 soldi, 8 denari; si dimanda il prezzo del rubbo. È chiaro, che se il prezzo del rubbo fosse cognito, moltiplicandolo per 23 rubbi, 12 libbre, 6 oncie considerato come numero astratto, dovrebbe dare al prodotto il prezzo totale 301 lire, 11 soldi, 8 denari; bisogna dunque dividere il prezzo totale per 23 rubbi, 12 libbre, 6 oncie; e per questo si convertirà prima il divisore in una frazione del rubbo; il che si farà col ridurlo tutto in oncie, e col dare ad esso il denominatore 300, giacchè l'oncia è la trecentesima parte del rubbo; si avrà così per divisore

$\frac{7050}{300}$. Ora per dividere 301 lire, 11 soldi, 8 denari per $\frac{7050}{300}$ bisogna moltiplicare il dividendo pel denominatore 300, il che dà, come si vede qui sotto, 90475 lire, e dividere poscia questo prodotto pel numeratore 7050 secondo la regola dell' esempio precedente; si troverà così pel dimandato prezzo del rubbo 12 lire, 16 soldi, 8 denari.

$301^{ll.}$	$11^{ss.}$	$8^{dd.}$
300		
$90300^{ll.}$		
150		
15		
7	10^{s}	
2	10	
$90475^{ll.}$	$0^{ss.}$	

$90475^{ll.}$	$0^{ss.}$	7050
19975		$12^{ll.}$ $16^{ss.}$ $8^{dd.}$
5875		
20		
117500^{s}		
47000		
4700		
12		
56400^{d}		
.0000		

Si potrebbe anche facilitare l'operazione osservando, che il divisore frazionario $\frac{7050}{300}$ si riduce a $\frac{47}{2}$, come si poteva facilmente prevedere dal primo divisore complesso senza ridurlo in oncie; giacchè 23 rubbi, 12 libbre, 6 oncie fanno manifestamente 23 rubbi $\frac{1}{2}$ ossia $\frac{47}{2}$ del rubbo; basterebbe dunque moltiplicare il dividendo 301 lire, 11 soldi, 8 denari per 2, il che darebbe 603 lire, 3 soldi, 4 denari, e dividere poscia questo prodotto per 47; il che dà lo stesso quoziente già trovato di sopra, cioè 12 lire, 16 soldi, 8 denari.

Secondo caso. Quando il dividendo ed il divisore sono della stessa specie riguardo all'unità principale, *si riducono l'uno e l'altro nelle unità più piccole contenute, o in ambedue, o in uno dei due; e si divide quindi il primo risultato pel secondo, avendo*

cura di sviluppare il quoziente astratto in un numero complesso della natura indicata dall'enunciazione della questione.

Oppure si trasformano i due termini della divisione in numeri frazionari della comune unità principale, e si divide l' uno per l'altro secondo la regola delle frazioni, valutando il quoziente, come si è detto qui sopra.

Primo esempio.

La libbra di una data mercanzia vale 2 lire, 15 soldi, 7 denari; quante libbre si potranno comperare con 88 lire, 18 soldi, 8 denari.

Ognun vede, che si compreranno tante libbre, quante volte il prezzo della libbra è contenuto nella somma da spendere. Si dovrà dunque dividere 88 lire, 18 soldi, 8 denari per 2 lire, 15 soldi, 7 denari.

Dividendo			Divisore		
$88^{ll.}$	$18^{ss.}$	$8^{dd.}$	$2^{ll.}$	$15^{ss.}$	$7^{dd.}$
20			20		
1778^{s}			55^{s}		
12			12		
21344^{d}			667^{d}		
1334			$32^{lib.}$		

Riducendo il dividendo, ed il divisore in denari, si trova pel primo 21344 denari, e pel secondo 667 denari, onde il cercato quoziente sarà $\frac{21344}{667}=32$ libbre.

Secondo esempio.

Il trabucco di un dato lavoro costa 8 lire, 12 soldi, 6 denari; quanti trabucchi del medesimo lavoro si faranno eseguire con 349 lire, 6 soldi, 3 denari.

È chiaro che si faranno eseguire tanti trabucchi, quante

volte il costo di un trabucco è contenuto nella somma da spendere; giacchè questa somma rappresenta il prodotto del prezzo di un trabucco pel numero ricercato dei trabucchi. Si deve dunque dividere 349 lire, 6 soldi, 3 denari per 8 lire, 12 soldi, 6 denari, e valutarne il quoziente in trabucchi, piedi ed oncie.

Riducendo prima i due numeri proposti in denari, si troverà pel dividendo 83835 denari e pel divisore 2070 denari e facendo la divisione si otterrà per quoziente 40 trabucchi, 3 piedi.

Dividendo	Divisore
$349^{ll.}$ $6^{ss.}$ $3^{dd.}$	$8^{ll.}$ $12^{ss.}$ $6^{dd.}$
20	20
6986^{s}	172^{s}
12	12
83835^{d}	2070^{d}
1035	$40^{trab.}$ $3^{piedi.}$
6	
6210	
.000	

Terzo esempio.

Si pagò 1 lira per 8 trabucchi, 4 piedi, 6 oncie di lavoro; quanto si pagherà per 137 trabucchi, 0 piedi, 6 oncie.

Il numero delle lire da pagarsi sarà indicato dal numero di volte, che 137 trabucchi, 0 piedi, 6 oncie contengono 8 trabucchi, 4 piedi, 6 oncie; bisogna dunque dividere 137 trabucchi, 0 piedi, 6 oncie per 8 trabucchi, 4 piedi, 6 oncie, e valutare il quoziente astratto in lire, soldi e denari.

Riducendo il dividendo, ed il divisore in oncie si troverà 9870 pel primo, e 630 pel secondo; e dividendo 9870 per 630, o più semplicemente 987 per 63, si troverà al quoziente 15 lire, 13 soldi, 4 denari.

Dagli addotti esempi si può facilmente conoscere l'andamento da seguitare in qualunque altro caso particolare.

§ 71. Natura del quoziente; verificazione della moltiplicazione e divisione.

Quando si tratta di numeri concreti, se il dividendo ed il divisore sono della stessa natura riguardo all' unità principale, il quoziente astratto esprimerà altrettante unità concrete della specie determinata dalle condizioni della questione pratica. Quando poi il dividendo ed il divisore sono di specie diversa, allora il quoziente sarà della natura del dividendo, ed il divisore si riguarderà come un numero astratto, indicante in quante parti si deve spartire il dividendo.

Per fare la prova della moltiplicazione , e della divisione dei numeri complessi, invece di dividere il prodotto per uno dei due fattori, come si usa d'ordinario per la prima prova, e moltiplicare il quoziente pel divisore, come si usa nella seconda , sarà più spediente, riguardo alla prima, di raddoppiare il moltiplicando, e prendere la metà del moltiplicatore, o inversamente, e rifare la moltiplicazione; il prodotto deve tornare lo stesso di prima: e riguardo alla seconda prova si può raddoppiare i due termini della divisione, oppure prenderne la metà, e rifare la divisione sui due numeri così cangiati; il quoziente deve pure essere lo stesso di prima. I principianti potranno per profittevole esercizio verificare con questo metodo le operazioni precedenti.

§ 72. Conversione di un numero complesso in decimali, e viceversa.

Può anche occorrere di dover convertire un numero complesso in decimali e viceversa ; queste trasformazioni saranno agevoli, se si ritiene che le suddivisioni complesse di una data unità principale si possono sempre ridurre in frazione ordinaria della stessa unità (§ 65), e che una frazione ordinaria qualunque può sempre convertirsi in frazione decimale : *ed inversamente*, che una frazione decimale qualunque di una data unità concreta

può sempre convertirsi nella sua generatrice ordinaria, e questa nelle suddivisioni complesse della stessa unità concreta.

Abbiansi, ad esempio, 8 trabucchi, 4 piedi, 6 oncie, e si voglia convertire in decimali le due suddivisioni complesse del trabucco: si ridurranno primieramente i 4 piedi, 6 oncie in $\frac{3}{4}$ del trabucco; e convertendo poscia $\frac{3}{4}$ in decimali, si troverà che $8^{tr.}$, $4^{p.}$ $6^{o.}$ fanno $8^{tr.}$ 75.

Parimente 7 rubbi, 16 libbre, 3 oncie si convertiranno prima in $7^{rub}\frac{195}{300}$; e quindi in $7^{rub.}$, 65 riducendo in decimali la frazione di rubbo $\frac{195}{300}$.

Inversamente, per ridurre in soldi e denari la frazione decimale della lira $0^{ll.}$, 875, basterà scriverla sotto la forma di frazione ordinaria $\frac{875}{1000}$ e svilupparla quindi nelle suddivisioni complesse della lira, moltiplicando cioè il numeratore per 20, e dividendo pel denominatore per avere i soldi, e moltiplicando poscia il numeratore della nuova frazione di soldo per 12, e dividendo pel denominatore per ottenere i denari; si troverà così che la frazione $0^{ll.}$, 875 è equivalente a $0^{ll.}$, $17^{ss.}$ $6^{dd.}$ Si troverà medesimamente che la frazione di rubbo 0,375 è equivalente a 9 libbre, 4 oncie, 4 ottavi.

Queste trasformazioni riuscendo raramente esatte, si usa stabilire un limite di approssimazione conveniente al caso che si considera; ma allora bisogna avere le debite avvertenze, acciocchè la parte trascurata sia veramente minore di un'unità dell'ultimo ordine di cui si vuole tener conto.

CAPO VI.

Del sistema metrico decimale.

Idea di un sistema di misure uniforme e più adatto al calcolo decimale; base del sistema. — Metro; sua lunghezza ragguagliata alle misure antiche; vocaboli adottati per esprimere i multipli e le suddivisioni del metro. — Misure di superficie. — Misure di solidità o di volume. — Misure di capacità pei liquidi e pei grani. — Misure di peso — Monete. — Passaggio da una suddivisione ad un'altra colla semplice trasposizione della virgola. — Tabella dei pesi e misure metriche più comunemente usate, e tabelle comparative delle misure antiche colle misure metriche.

---

§ 73. Idea di un sistema di misure uniforme, e più adatto al calcolo decimale; base del sistema.

La diversità delle antiche misure, e delle loro suddivisioni, non solo nei diversi Stati, ma ancora nelle varie parti di un medesimo Stato, fece nascere il desiderio di un sistema unico di misure, fondato sopra una base invariabile, che potesse verificarsi in tutti i tempi, ed in tutti i paesi; nel qual sistema le divisioni e suddivisioni delle diverse unità concrete fossero più uniformi tra loro e più analoghe al sistema di numerazione decimale; il che renderebbe il loro calcolo molto più facile, e più spedito di quello dei numeri complessi.

Il Governo francese, in sul finir dello scorso secolo, recò ad effetto questo ragionevole desiderio, stabiliendo il nuovo sistema metrico, che per la riconosciuta sua grande facilità è stato poscia introdotto anche in molte altre regioni d'Europa.

La base di questo sistema fu presa dalle dimensioni della Terra. Celebri astronomi per ordine del Governo misurarono un arco di circa 10 gradi del meridiano terrestre, che passa per Parigi, e dedussero da questa misura la lunghezza della quarta parte del meridiano terrestre, cioè la distanza dal Polo all' Equa-

8

Per la verità

Approvo quanto dice l'amico [illegible]
"Les Français sont des cochons"
vi manca un s. Peccato!

tore. Questa distanza fu divisa in dieci milioni di parti eguali ed una di queste parti chiamata *metro*, che significa misura, fu presa per unità di lunghezza, dalla quale derivano tutte le altre unità del sistema detto perciò *sistema metrico*.

§ 74. Metro: sua lunghezza ragguagliata alle misure antiche; vocaboli adottati per esprimere i multipli, e le suddivisioni del metro.

Il metro è la diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre, ossia della distanza dal Polo all'Equatore misurata sul meridiano di Parigi.

Dalle operazioni di misura, eseguite e verificate colla massima accuratezza, risultò la lunghezza del quarto del meridiano terrestre quasi esattamente di 5130740 tese di Parigi, ossia di 30784440 piedi parigini.

Dividendo questo numero per dieci milioni, e sviluppando il quoziente nelle suddivisioni del piede parigino, che si divide in 12 pollici, ed il pollice in 12 linee, si avrà la lunghezza del metro, espressa in piedi parigini, eguale a

$$3.^{\text{piedi}}\ 0.^{\text{pollici}}\ 11,^{\text{linee}}\ 296.$$

La lunghezza del metro ragguagliata col campione camerale del nostro piede liprando, risultò eguale ad

$$1.^{\text{piede}}\ 11.^{\text{oncie}}\ 4.^{\text{punti}}\ 3,^{\text{atomi}}\ 4.$$

Per indicare misure più grandi, o più piccole del metro, si convenne di adoperare i vocaboli seguenti tratti dal greco per notare i multipli decimali del metro, e dal latino per le suddivisioni parimente decimali.

Miria, Kilo, Ecto, Deca, Deci, Centi, Milli, che significano corrispondentemente diecimila, mille, cento, dieci, decimo di, centesimo di, millesimo di, e che si pongono avanti il nome metro nella maniera seguente:

Miriametro significa . . . . . . dieci mila metri;
Kilometro . . . . mille metri;
Ectometro . . . . cento metri;
Decametro . . . . dieci metri;
Metro . . . . unità principale;
Decimetro . . . . : decimo di metro;
Centimetro . . . . centesimo di metro;
Millimetro . . . . millesimo di metro;

Il miriametro ed il kilometro sono misure itinerarie presentemente in uso.

Il miriametro vale 4 miglia piemontesi, più 44.$^{\text{trab.}}$ 0.$^{\text{piedi}}$ 1.$^{\text{oncia}}$ 4. $^{\text{punti}}$ 6, $^{\text{atomi}}$ 72, ed il kilometro vale 324. $^{\text{trab.}}$ 2.$^{\text{piedi}}$ 4.$^{\text{oncie}}$ 11$^{\text{punti}}$ 3,$^{\text{atomi}}$ 67.

I sette vocaboli adottati per esprimere i multipli, e le suddivisioni del metro, servono anche per segnare i multipli, e le suddivisioni delle altre specie di misure, cangiandone le sole finali secondo la natura della misura.

§ 75. Misure di superficie.

L'unità ordinaria di superficie è il metro quadrato; ma per le grandi superficie agrarie, o dei terreni, si prese per unità il decametro quadrato, cioè un quadrato, che ha per lato un decametro, o dieci metri; e quest'unità si chiama *Aro*. I multipli e le suddivisioni dell'*Aro* si formarono conformemente ai multipli e suddivisioni del metro; così

Miria-aro o *Miriaro* significa . . . . diecimila ari;
Kilaro . . . . mille ari;
Ectaro . . . . cento ari;
Decaro. . . . . dieci ari;
Aro . . . . unità principale;
Deciaro . . . . . . decimo di aro;
Centiaro . . . . centesimo di aro;
Milliaro . . . . . . millesimo di aro.

L'ectaro, l'aro ed il centiaro sono tra queste misure le sole in uso.

L'ectaro in misure piemontesi corrisponde a

2.giorn. 63.tav. 1.pied. 1.onc. 2.punt. 1,at. 53.

L'aro vale 2.tav. 7.pied. 6.onc. 10. punt. 2,at. 65, ed il centiaro, ossia metro quadrato, vale

3.onc. di tav. 9.punt. 5,at. 55.

§ 76. Misure di solidità o di volume.

L'unità di volume è il metro cubo; cioè un cubo o dado, che ha un metro di lato. I multipli e le suddivisioni del metro cubo non hanno ricevuto denominazioni particolari.

Il metro cubo, quando si tratta di misura di legno da fuoco, di fieno, e di materiali di costruzione, prende il nome di *stero*.

Lo stero, ossia metro cubo, valutato in piedi liprandi piemontesi cubici, equivale a 7,p. c. 37401.

§ 77. Misure di capacità pei liquidi e pei grani.

L'unità delle misure di capacità è il decimetro cubo, che si chiama *litro*.

I multipli, e le suddivisioni del litro principalmente in uso sono le seguenti:

Ectolitro o misura di . . . . cento litri;
Decalitro . . . . dieci litri;
Litro . . . . unità principale;
Decilitro . . . . decimo di litro;
Centilitro . . . . centesimo di litro.

Il kilolitro, e il mirialitro non sono in uso.

L'ectolitro valutato in misure piemontesi di materie liquide corrisponde a 2.brente 1.pinta 0,quartini 18.

Ed il litro corrisponde a quartini 2,92, quasi a tre quartini.

Trattandosi di grani o altre materie secche, l'ectolitro vale
4.$^{em.}$ 2.$^{cop.}$ 18,$^{onc.}$ 63.
ed il litro, . . . 0. 0. 8. 35.

§ 78. Misure di peso.

Nelle misure di peso si scelse per unità principale il peso di un centimetro cubo d'acqua distillata alla temperatura di 3 $^1/_2$ circa gradi Réaumur, ossia 4 gradi divisione centigrada, e questa unità si chiamò *gramma*.

Il valore del gramma in pesi piemontesi è di 18 grani, 17 granotti e $\frac{75}{100}$ di granotto.

I multipli e le suddivisioni del gramma sono:

Miriagramma che vale . . . . . dieci mila grammi;
Kilogramma . . . . mille grammi;
Ectogramma . . . . cento grammi;
Decagramma . . . . dieci grammi;
Gramma . . . . unità principale;
Decigramma . . . . decimo di gramma;
Centigramma . . . . centesimo di gramma;
Milligramma . . . . millesimo di gramma.

In misure piemontesi il miriagramma
vale . . . . 27.$^{lib.}$ 1.^{onc} 2.$^{ott.}$ 2.$^{den.}$ 4.$^{gr.}$ 0,$^{granot.}$ 95
ed il kilogramma . . . 2. 8. 4. 0. 19. 14, 49.
e prendendo la decima di quest'ultimo, e dei successivi valori, si troverebbe in pesi piemontesi il valore dell'ectogramma, del decagramma, del gramma, decigramma ecc.

§ 79. Monete.

Da una verga o lamina d'argento al titolo di nove parti di fino ed una di lega, cioè composta $\frac{9}{10}$ d'argento puro, e

di $\frac{1}{10}$ di rame, si tagliò un pezzo del peso di 5 grammi; il valore di questo pezzo fu preso per unità monetaria, e si chiamò *franco*.

Il franco si divide in dieci decimi, ed il *decimo* in dieci centesimi.

I multipli decimali del franco non hanno ricevuto alcuna denominazione particolare.

La nostra *lira* nuova piemontese è in titolo e peso pari al franco, e si divide come il franco in cento centesimi.

§ 80. Passaggio da una suddivisione ad un'altra colla semplice trasposizione della virgola.

Dalla precedente esposizione delle nuove misure metriche, potrà ognuno facilmente riconoscere, che tutte queste misure nei loro multipli e nelle loro suddivisioni seguono costantemente la legge decimale del sistema di numerazione; il che rende la loro scrittura facile ed analoga a quella dei numeri decimali, e serve anche a convertire facilmente le une nelle altre, le diverse unità e suddivisioni di una stessa misura col solo trasporto della virgola a destra od a sinistra.

Per esempio volendo convertire 987,$^{\text{metri}}$ 654 in decimetri, basterà trasportare la virgola di un posto verso destra, e si avrà 9876,$^{\text{decim.}}$ 54.; se si volesse prendere per unità il decametro, trasportando la virgola di un posto verso sinistra, il numero proposto diventerebbe 98,$^{\text{decam}}$ 7654; e prendendo per unità il millimetro, levando la virgola, si avrebbe 987654 millimetri.

Medesimamente 9221,$^{\text{gram.}}$ 113 equivalgono a 922,$^{\text{decag.}}$ 1113; oppure a 92,$^{\text{ettogr}}$,21113; oppure 9,$^{\text{kilogr.}}$ 221113 ecc.

L'applicazione delle quattro regole dell'Aritmetica alle misure metriche non può presentare alcuna difficoltà a chi conosce il calcolo delle frazioni decimali; non è d'uopo arrestarsi ad esempi particolari di quest'applicazione, principalmente perchè si avrà occasione d'incontrarne in appresso.

§ 81. Tabella dei pesi e misure metriche più comunemente usate, e tabelle comparative delle misure antiche colle metriche.

Occorrendo soventissimo di dover operare la conversione delle antiche misure in quelle nuove, o viceversa, si offrono, oltre ad una tabella dei pesi e misure metriche più comunemente usate, tabelle comparative delle misure antiche colle metriche.

TABELLA INDICATIVA

de' nuovi pesi e misure più comunemente usati

MOLTIPLI DELLE UNITA' SEMPLICI				UNITÀ SEMPLICI	SOTTO-MULTIPLI DELLE UNITA' SEMPLICI		
Miria (10000)	Chilo (1000)	Etto (100)	Deca (10)		Deci $\frac{1}{10}$	Centi $\frac{1}{100}$	Milli $\frac{1}{1000}$
Miria-metro	Chilo-metro	Etto-metro	Deca-metro	Metro	Deci-metro	Centi-metro	Milli-metro
»	»	Ettara	»	Ara	»	Centiara	»
»	»	Ettolitro	Decalitro	Litro	Decilitro	»	»
»	»	»	Decastero	Stero	Decistero	»	»
Miria-gramma	Chilo-gramma	Etto-gramma	Deca-gramma	Gramma	Deci-gramma	Centi-gramma	Milli-gramma
»	»	»	»	Lira	Decimo	Centesimo	»

NB. *Cento chilogrammi formano il quintale metrico; mille chilogrammi corrispondono al peso d'un metro cubo d'acqua e formano la tonnellata di mare.*

RIDUZIONE DELLE MISURE ANTICHE DI PIEMONTE IN NUOVE.

Tabella I.

MISURE DI LUNGHEZZA.							
Numero delle unità	Miglia di 800 trabucchi in metri	Trabucchi di 6 piedi in metri	Piedi di 12 oncie in decimetri	Oncie di 12 punti in centimetri	Punti in millimetri	Tese di 40 oncie in metri	Rasi di 14 oncie in decimetri
1	2469,135802	3,086420	5,144033	4,286694	3,572245	1,714678	6,001372
2	4938,271605	6,172839	10,288066	8,573388	7,144490	3,429355	12,002743
3	7407,407407	9,259259	15,432099	12,860082	10,716735	5,144033	18,004115
4	9876,543210	12,345679	20,576132	17,146776	14,288980	6,858711	24,005487
5	12345,679012	15,432099	25,720164	21,433470	17,861225	8,573388	30,006859
6	14814,814815	18,518518	30,864197	25,720165	21,433470	10,288066	36,008230
7	17283,950617	21,604938	36,008230	30,006859	25,005715	12,002743	42,009602
8	19753,086419	24,691358	41,152263	34,293553	28,577960	13,717421	48,010974
9	22222,222222	27,777778	46,296296	38,580247	32,150205	15,432099	54,012346

Tabella II.

MISURE DI SUPERFICIE					MISURE AGRARIE		
Numero delle unità	Miglia quadrate in ettometri quadrati	Piedi quadrati in decimetri quadrati	Trabucchi quad. di 6 piedi di trabucco in metri quadrati	Piedi di trabucco quadrato di 12 oncie di trab. quadrato in metri quadrati	Numero delle unità	Giornate di 100 tavole in are	Tavole di 4 trab. quadrati in centiare
1	609,663161	264,610747	9,525987	1,587664	1	38,103948	38,103948
2	1219,326322	529,221494	19,051974	3,175329	2	76,207895	76,207895
3	1828,989483	793,832241	28,577961	4,762993	3	114,311843	114,311843
4	2438,652644	1058,442988	38,103948	6,350658	4	152,415790	152,415790
5	3048,315806	1323,053735	47,629934	7,938322	5	190,519738	190,519738
6	3657,978967	1587,664482	57,155921	9,525987	6	228,623685	228,623685
7	4267,642128	1852,275229	66,681908	11,113651	7	266,727633	266,727633
8	4877,305289	2116,885976	76,207895	12,701316	8	304,831581	304,831581
9	5486,968450	2381,496723	85,733882	14,288980	9	342,935528	342,935528

Tabella III.

MISURE DI CAPACITÀ.

LIQUIDI.				MATERIE SECCHE.			
Numero delle unità	Brente di 36 pinte in litri	Pinte di 2 boccali in litri	Boccali di 2 quartini in centilitri	Numero delle unità	Sacchi di 5 emine in decalitri	Emine di 8 coppi in decalitri	Coppi in litri
1	49,306931	1,369637	68,481845	1	11,527493	2,305499	2,881873
2	98,613862	2,739274	136,963690	2	23,054985	4,610997	5,763746
3	147,920792	4,108911	205,445534	3	34,582478	6,9 6496	8,645619
4	197,227723	5,478548	273,927379	4	46,109970	9,221994	11,527493
5	246,534654	6,848185	342,409224	5	57,637463	11,527493	14,400366
6	295,841585	8,217822	410,891069	6	69,164955	13,832991	17,291239
7	345,148516	9,587459	479,372914	7	80,692448	16,138489	20,173112
8	394,455446	10,957096	547,854758	8	92,219941	18,443988	23,054985
9	443,762377	12,326733	616,386603	9	103,747433	20,749487	25,936858

Tabella IV.

MISURE DI SOLIDITÀ.

NUMERO delle UNITÀ	TRABUC. CUBI di 6 piedi di trabucco cubo in metri cubi	PIEDI DI TRAB. CUBO di 12 oncie di trabucco cubo in metri cubi	PIEDI CUBI in decimetri cubi	ONCIE CUBE in centimetri cubi	TRABUCCO CAMERALE per le fabbriche di 30 piedi cubi in metri cubi	TESE DA LEGNA di 51,200 oncie cube in metri cubi	TESE DA FIENO o tese cubo di 64,000 oncie cube in metri cubi	CARRI DA TERRA di piedi cubi 4 1/3 in decim. cubi	CARRI DA PIETRA di piedi cubi 1 1/2 in decim. cubi
1	29,401194	4,900199	136,116639	78,771203	4,083499	4,033086	5,041357	181,488853	204,174959
2	58,802388	9,800398	272,233279	157,542407	8,166998	8,066171	10,082714	362,977705	408,349918
3	88,203582	14,700597	408,349918	236,313610	12,250498	12,099257	15,124071	544,466558	612,524877
4	117,604776	19,600796	544,466558	315,084813	16,333997	16,132342	20,165428	725,955410	816,699836
5	147,005971	24,500995	680,583197	393,856017	20,417496	20,165428	25,206785	907,444263	1020,874796
6	176,407165	29,401194	816,699836	472,627220	24,500995	24,198514	30,248142	1088,933115	1225,049755
7	205,808359	34,301393	952,816476	551,398423	28,584494	28,231599	35,289499	1270,421968	1429,224714
8	235,209553	39,201592	1088,933115	630,169616	32,667993	32,264685	40,330856	1451,910820	1633,399673
9	264,610747	44,101791	1225,049755	708,940830	36,751493	36,297770	45,372213	1633,399673	1837,574632

Tabella V.

PESI				
NUMERO delle UNITÀ	RUBBI di 25 libbre in chilogrammi	LIBBRE di 12 oncie in grammi	ONCIE di 24 denari in grammi	LIBBRA FARMACEUTICA in grammi
1	9,221995	368,879782	30,739982	307,399818
2	18,443989	737,759563	61,479964	614,799636
3	27,665984	1106,639345	92,219945	922,199454
4	36,887978	1475,519126	122,959927	1229,599272
5	46,109973	1844,398908	153,699909	1536,999090
6	55,331967	2213,278690	184,439891	1844,398908
7	64,553962	2582,158471	215,179873	2151,798726
8	73,775956	2951,028253	245,919854	2459,198544
9	82,997951	3320,018034	276,659836	2766,598362

RIDUZIONE DELLE MISURE METRICHE IN MISURE ANTICHE DI PIEMONTE.

Tabella VI.

MISURE DI LUNGHEZZA.

Nº delle unità	Miriametri in miglia e trabucchi		Chilometri in trabucchi	Ettometri in trabucchi, piedi, oncie, punti, atomi e decimi d'atomo	Decametri in trabucchi, piedi, oncie, punti, atomi e centesimi d'atomo	Metri in piedi, oncie, punti, atomi, e millesimi d'atomo	Decimetri in oncie, punti, atomi e decimillesimi d'atomo	Centimetri in punti, atomi e centimillesimi d'atomo	Millimetri in atomi e milionesimi d'atomo	Metri in rasi, oncie, punti, atomi e millesimi d'atomo
	M.	*T.*	*T.*	*T. P. o. p. a.*	*T. P. o. p. a.*	*P. o. p. a.*	*o. p. a.*	*p. a.*	*a.*	*R. o. p. a.*
1	4.	40	324	32. 2. 4. 9. 7, 2	3. 1. 5. 3. 4, 32	1. 11. 3. 11, 232	2. 3. 11, 9232	2. 9, 59232	3,359232	1. 9. 3. 11, 232
2	8.	80	648	64. 4. 9. 7. 2, 4	6. 2. 10. 6. 8, 64	3. 10. 7. 10, 464	4. 7. 11, 8464	5. 7, 18464	6,718464	3. 4. 7. 10, 464
3	12.	120	972	97. 1. 2. 4. 9, 6	9. 4. 3. 10. 0, 96	5. 9. 11. 9, 696	6. 11. 11, 7696	8. 4, 77699	15,077696	4. 13. 11. 9, 696
4	16.	160	1296	129. 3. 7. 2. 4, 8	12. 5. 9. 1. 5, 28	7. 9. 3. 8, 928	9. 3. 11, 6928	11. 2, 36928	13,436928	6. 9. 3. 8, 928
5	20.	200	1620	162. 0. 0. 0. 0, 0	16. 1. 2. 4. 9, 80	9. 8. 7. 8, 160	11. 7. 11, 6160	13. 11, 96160	16,796160	8. 4. 7. 8, 160
6	24.	240	1944	194. 2. 4. 9. 7, 2	19. 2. 7. 8. 1, 92	11. 7. 11. 7, 392	13. 11. 11, 5392	16. 9, 55392	20,155392	9. 15. 11. 7, 392
7	28.	280	2268	226. 4. 9. 7. 2, 4	22. 4. 0. 11. 6, 24	13. 7. 3. 6, 624	16. 3. 11, 4624	19. 7, 14624	23,514624	11. 9. 3. 6, 624
8	32.	320	2592	259. 1. 2. 4. 9, 6	25. 5. 6. 2. 10, 56	15. 6. 7. 5, 856	18. 7. 11, 3856	22. 4, 73856	26,873856	13. 4. 7. 5, 856
9	36.	360	2916	291. 3. 7. 2. 4, 8	29. 0. 11. 6. 2, 88	17. 5. 11. 5, 088	20. 11. 11, 3088	25. 2, 23088	30,233088	14. 13. 11. 5, 088

Tabella VII.

MISURE DI SUPERFICIE.

Numero delle unità	Ettare in giornate, tavole, e piedi di tavola			Are in trabucchi quadrati, piedi e oncie di trabucco quadrato			Metri quadrati in piedi quadrati, oncie e punti di piede quadrato		
	G.	T.	P.	T.q.	p.	o.	P.q.	o.	p.
1	2.	62.	5.	10.	2.	11.	3.	9.	4.
2	5.	24.	11.	20.	5.	11.	7.	6.	8.
3	7.	87.	4.	31.	2.	0.	11.	3.	1.
4	10.	49.	9.	41.	5.	10.	15.	1.	5.
5	13.	12.	2.	52.	2.	9.	18.	9.	9.
6	15.	74.	8.	62.	5.	9.	22.	6.	1.
7	18.	37.	1.	73.	2.	8.	26.	4.	5.
8	20.	99.	6.	83.	5.	8.	30.	2.	6.
9	23.	62.	0.	94.	2.	7.	33.	11.	2.

Tabella VIII.

MISURE DI SOLIDITÀ.

Numero delle unità	Metri cubi in piedi cubi, oncie e punti di piede cubo			Decimetri cubi in oncie cube, punti e atomi d'oncia cuba			Metri cubi in piedi manuali cubi, oncie e punti			Metri cubi in piedi, oncie e punti di trab camerale		
	P.C.	o.	p.	O.C.	p.	a.	p.m.c.	o.	p.	p.	o.	p.
1	7.	4.	2.	12.	8.	4.	24.	6.	4.	1.	5.	8.
2	14.	8.	4.	25.	4.	8.	49.	4.	9.	2.	11.	3.
3	22.	0.	6.	38.	1.	0.	74.	3.	1.	4.	4.	11.
4	29.	4.	8.	50.	9.	5.	99.	1.	5.	5.	10.	6.
5	36.	8.	10.	63.	5.	9.	123.	7.	10.	7.	4.	2.
6	44.	0.	11.	76.	2.	1.	148.	6.	2.	8.	9.	9.
7	51.	5.	1.	88.	10.	5.	173.	4.	6.	10.	3.	5.
8	58.	9.	3.	101.	6.	9.	198.	2.	10.	11.	9.	1.
9	66.	1.	5.	114.	3.	1.	223.	1.	3.	13.	2.	8.

Tabella IX.

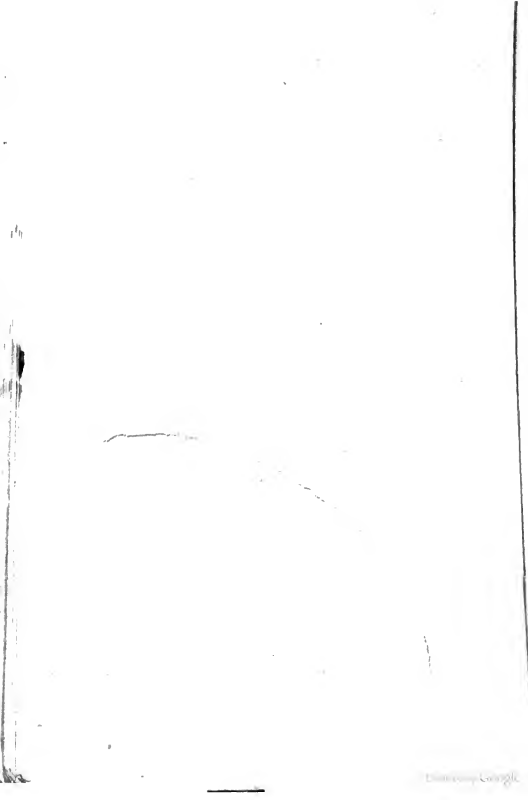
PESI.				
Numero delle unità	Chilogrammi in libbre, oncie, ottavi e denari	Ettogrammi in oncie, ottavi, denari e grani	Decagrammi in ottavi denari, grani e granotti	Grammi in grani e granotti
	l. on. ott. d.	*on. ott. d. g.*	*ott. d. g. g.ti*	*g. g.ti*
1	2. 8. 4. 1	3. 2. 0. 2	2. 1. 19. 9	18. 18
2	5. 5. 0. 1	6. 4. 0. 4	5. 0. 14. 18	37. 11
3	8. 1. 4. 2	9. 6. 0. 5	7. 2. 10. 3	56. 5
4	10. 10. 1. 0	13. 0. 0. 7	10. 1. 4. 12	74. 23
5	13. 6. 5. 1	16. 2. 0. 9	13. 0. 0. 21	93. 17
6	16. 3. 1. 1	19. 4. 0. 11	15. 1. 20. 6	112. 10
7	18. 11. 5. 2	22. 6. 0. 12	18. 0. 14. 16	131. 4
8	21. 8. 2. 0	26. 0. 0. 14	20. 2. 9. 1	149. 22
9	24. 4. 6. 1	29. 2. 0. 16	23. 1. 5. 10	168. 15

Tabella X.

MISURE DI CAPACITÀ						
	LIQUIDI			MATERIE SECCHE		
Numero delle unità	Ettolitri in brente, pinte, boccali e quartini	Decalitri in pinte, boccali e quartini	Litri in boccali e quartini	Ettolitri in emine, coppi e cucchiai	Decalit. in coppi e cucchiai	Litri in cucchiai
	b. p. b. q.	*p. b. q.*	*b. q.*	*E. co. cu.*	*co. cu.*	
1	2. 1. 0. 0	7. 0. 1	1. 1	4. 2. 17	3. 11	8
2	4. 2. 0. 1	14. 1. 0	3. 0	8. 5. 10	6. 23	17
3	6. 3. 0. 1	22. 0. 0	4. 1	13. 0. 2	10. 10	25
4	8. 4. 1. 0	29. 0. 1	6. 0	17. 2. 19	13. 21	33
5	10. 5. 1. 0	36. 1. 0	7. 1	21. 5. 12	17. 8	42
6	12. 6. 1. 1	43. 1. 1	9. 0	26. 0. 5	20. 20	50
7	14. 7. 1. 1	51. 0. 1	10. 0	30. 2. 22	24. 7	58
8	16. 8. 1. 1	58. 1. 0	11. 1	34. 5. 14	27. 18	67
9	18. 10. 0. 0	65. 1. 1	13. 0	39. 0. 7	31. 6	75

MISURE ITINERARIE MODERNE IN METRI

NOME DE' PAESI	INDICAZIONE DELLE MISURE	VALORI IN METRI
BELGIO	*Miglio* metrico	1000,000
»	*Lega* del Brabante	5555,556
»	*Lega* di Fiandra = 20000 piedi del Reno.	6277,080
DANIMARCA . . .	*Miglio* di 24000 piedi danesi	7538,000
FRANCIA.	*Lega* di posta di 2000 tese	3898,073
»	*Tesa*	1,949
»	*Lega* di mare di 20 al grado	5555,957
»	*Lega* di 25 al grado	4444,766
GERMANIA. . . .	*Miglio* geografico, o medio di 15 al grado.	7407,407
Austria	*Miglio* di 4000 tese di Vienna o Klafter.	7586,472
»	*Klafter*	1,897
»	*Miglio* di mare.	1851,986
Baviera	*Miglio* di 23660 piedi del Reno	7425,786
Boemia	*Miglio* di 22017 piedi del Reno	6910,124
»	*Piede* del Reno.	0,314
Prussia	*Lega* di 15 al grado	7407,943
»	*Miglio* di 24801 piedi del Reno	7783,893
»	*Miglio* di Slesia di 20877 piedi del Reno	6552,330
Sassonia. . . .	*Miglio* di 32000 piedi di Dresda detto di Polizia.	9064,320
»	*Piede* di Dresda	0,283
Vürtemberg . .	*Miglio* di 15 al grado.	7407,948
GRECIA	*Miglio* moderno.	1202,000
INGHILTERRA . .	Miglio di 8 furlongs = 1760 yards = 5280 piedi	1609,315
»	*Miglio* geografico o di mare = 1'. . . .	1851,986
»	*Lega* di 20 al grado medio = 3 miglia di mare	5555,958
ITALIA	*Miglio* geografico di 60 al grado	1851,999
Napoli, Sicilia .	*Miglio* uguale al 1' di grado	1851,986
Piemonte . . .	*Miglio* di 800 trabucchi, di 45 al grado.	2469,100
Roma	*Miglio* antico di 75 al grado	1481,590
»	*Miglio* moderno	1489,060
Toscana	*Miglio* di 2833,33 braccia	1653,000
»	*Braccio* di Firenze	0,583
Venezia	*Miglio*.	1834,118

NOME DE' PAESI	INDICAZIONE DELLE MISURE	VALORI IN METRI
NORVEGIA. . . .	*Miglio* = 35491 piedi del Reno.	11138,992
OLANDA	*Miglio* olandese di 20692 piedi.	5856,994
»	*Piede* di Olanda	0,283
»	*Miglio* di mare di 20 al grado.	5555,556
POLONIA	*Miglio* di 20 al grado.	5555,556
»	*Miglio* nuovo di 8 werste	8534,000
PORTOGALLO . .	*Lega* di 18 al grado	6173,286
»	*Lega* di mare di 20 al grado	5555,957
»	*Lega* di mare di 60 al grado	1851,986
RUSSIA.	*Werste* di 500 saginee = 1500 arscen. .	1066,781
»	*Saginea* o tesa.	2,134
»	*Miglio* di Lituania di 28520 piedi del Reno.	8951,255
SPAGNA	*Lega* reale di 25000 piedi.	7066,375
»	*Lega* comune di 19800 piedi	5596,569
»	*Lega* di mare	6364,955
SVEZIA	*Miglio* 18000 alnar, o 36000 piedi di Svezia	10686,168
SVIZZERA	*Miglio* di 24620 piedi di Basilea o Zurigo.	8369,000
UNGHERIA. . . .	*Miglio* di Ungheria	7586,000

PARTE SECONDA

ELEMENTI DI ALGEBRA

CAPO I.

Nozioni preliminari.

Algebra; suo oggetto; differenza tra questa e l'Aritmetica. — *Segni algebrici; espressione algebrica, formola.*

§ 1. Algebra; suo oggetto; differenza tra questa e l'Aritmetica.

L'Algebra egualmente che l'Aritmetica ha per oggetto i numeri: essa differisce però dall'Aritmetica nella maniera di considerarli, di rappresentarli con segni di convenzione, e di eseguire sopra di essi le quattro operazioni fondamentali del calcolo.

Nell'Aritmetica, come si è veduto finora, i numeri che entrano nelle diverse questioni, e che ne determinano le condizioni, sono sempre di un valore determinato e particolare, e combinati fra loro col mezzo delle quattro regole, dando risultati parimente determinati.

Nell'Algebra al contrario si considerano generalmente nu-

meri di un valore indeterminato, e si notano perciò colle lettere dell'alfabeto *a*, *b*, *c*, ecc., le quali non avendo alcuna relazione più speciale con un valore che con un altro, possono rappresentare tutti i valori, o almeno tutti quelli che si vogliono o possono convenientemente loro attribuire.

Per farsi una giusta idea dell'indeterminazione delle quantità letterali o algebriche e della loro origine, gioverà riflettere, che sui numeri si possono fare due astrazioni essenzialmente diverse; la prima si è quella che dà origine ai numeri astratti, e che consiste nel considerare i numeri come semplici rapporti delle quantità misurate alle rispettive unità di misura, senza punto badare alle loro rappresentazioni concrete.

Riguardo alla seconda è necessario osservare primieramente, che l'andamento di ciascheduna operazione dell'Aritmetica è sempre lo stesso, quantunque i numeri siano differenti: che sempre in una medesima maniera si procede per sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere numeri grandi o numeri piccoli; in somma che i modi delle operazioni sono sempre gli stessi nelle medesime operazioni, e sono indipendenti dai valori particolari dei numeri, sui quali si opera.

Dal che si scorge che si può prescindere dal considerare nei numeri le attuali diversità dei loro valori, e contemplare soltanto quello che hanno di comune, cioè la proprietà di entrare nelle operazioni sempre allo stesso modo: e questa si è la seconda astrazione, dalla quale nascono i numeri indeterminati ossia le quantità algebriche.

Egli è chiaro, che i numeri così generalmente considerati non possono più scriversi colle solite cifre; perchè, posto il sistema di enumerazione, qualunque numero scritto in cifre sarà sempre un numero particolare e determinato.

Le lettere dell'alfabeto convengono meravigliosamente alla scrittura dei numeri indeterminati; perchè, oltre alla facilità del loro maneggio, esse rappresentano altrettante forme generali, o simboli, che entrano nei calcoli per segnare i luoghi, dove poi nelle possibili applicazioni debbono essere messi i numeri, e

combinate coi segni delle operazioni esprimono in un modo generale le tracce del calcolo. Ma bisogna avvezzarsi a riguardare le lettere unicamente come sedi dei numeri, e non altramente.

§ 2. Segni algebrici; espressione algebrica; formola.

Per indicare i modi delle operazioni sulle quantità algebriche, e le relazioni che queste quantità hanno fra di loro, si usano quegli stessi segni, di cui si è già fatto uso antecedentemente nell'Aritmetica, ed alcuni altri, come il segno d'ineguaglianza $>$ o $<$ che si pronunzia *maggiore* o *minore*, e serve ad indicare che una quantità è più grande o più piccola di un'altra: esso si scrive tramezzo le due quantità coll'apertura rivolta verso la maggiore e la punta verso la minore: così $A > B$ significa A maggiore di B; ed $A < B$ significa A minore di B. Si darà la spiegazione degli altri segni, a misura che si presenterà l'occasione di farne uso.

È d'uopo avvertire però, che le operazioni dell'Algebra quantunque si chiamino, come in Aritmetica, somma, sottrazione, ecc., sono di un tenore differente. Per ben discernere questa differenza, bisogna distinguere nelle operazioni due stati: cioè un primo stato, nel quale le quantità si avvicinano fra di loro, e si indica in che maniera si debbano comporre: ed un secondo stato, nel quale i numeri si fondano insieme, e si ottiene da molti un numero solo. L'Algebra tiene le operazioni nel solo primo stato: l'Aritmetica le riduce al secondo. Quindi avviene che nelle espressioni algebriche si riconoscono le quantità, che si compongono, e i modi con cui si compongono: al contrario, nei risultati dell'Aritmetica non sono più riconoscibili gli elementi, le operazioni con cui s'ottennero.

Un'espressione algebrica, cioè composta di lettere e di segni, costituisce ciò che dicesi *formola*.

CAPO II.

Di alcune operazioni algebriche.

ARTICOLO I.

Dell'addizione

Addizione; coefficiente; termine; monomio; binomio; polinomio. — Riduzione dei termini simili; regola generale per l'addizione dei polinomii algebrici.

---

§ 3. Addizione; coefficiente; termine; monomio; binomio; polinomio.

L'addizione del numero a col numero b si indica scrivendo $a+b$. Medesimamente l'espressione $a+b+c+d$ indica la somma dei quattro numeri a, b, c, d. Se i numeri che si vogliono sommare fossero espressi dalla stessa lettera, e supposti per conseguenza uguali, si abbrevierebbe l'espressione della loro somma nel seguente modo: invece di $a+a+a+a$ si scriverebbe $4a$; medesimamente $a+a+a+a+b+b+b+c+c$ si scriverebbe $4a+3b+2c$. I tre numeri 4, 3, 2, posti alla sinistra delle tre lettere a, b, c rispettivamente si chiamano *coefficienti*. Il coefficiente è dunque un numero particolare scritto alla sinistra di una lettera, e che indica quante volte la quantità rappresentata da quella lettera deve essere ripetuta. Il coefficiente in Aritmetica si chiamerebbe un moltiplicatore.

Le diverse parti di una espressione algebrica, unite tra di

loro coi segni + (più) e — (meno) diconsi *termini*. Una quantità di un solo termine dicesi *monomio*: e si chiama *binomio*, *trinomio*, ed in generale *polinomio*, ogni quantità di due, di tre, o di molti termini. Così $4a$ è un monomio; $4a-2b$ è un binomio; e $4a-2b+c$ è un trinomio, ecc.

I termini preceduti dal segno + si chiamano positivi, o *additivi*; quelli che sono preceduti dal segno —, diconsi negativi, o *sottrattivi*. Un termine senza segno è supposto avere il segno +: e se è senza coefficiente, si sottintende sempre l'unità.

§ 4. Riduzione dei termini simili; regola generale per l'addizione dei polinomii algebrici.

Se si avesse il binomio $a-b$ da sommare col binomio $b-c$, si scriverebbe $a-b+b-c$; ma siccome il b deve essere sottratto da a, e poscia aggiunto nuovamente, la seconda operazione distrugge l'effetto della prima, e l'espressione della somma dei due binomii si riduce ad $a-c$. Questa semplificazione si chiama, in Algebra, *riduzione dei termini simili*.

Da queste premesse nasce la seguente regola generale:

Per sommare insieme più polinomii algebrici, i cui termini siano indistintamente affetti dai segni + o —, si scriveranno questi polinomii di seguito gli uni dopo gli altri, conservando ai termini il proprio segno; si farà poscia la riduzione dei termini simili, se havvi luogo.

Primo esempio.

$$\left.\begin{array}{l} 2a+3b+4c+d \\ 9a+2b+c+2d \\ a+b+c \end{array}\right\} \text{polinomii da sommare.}$$

Somma: $2a+3b+4c+d+9a+2b+c+2d+a+b+c$.
Somma ridotta: $12a+6b+6c+3d$.

Secondo esempio.

$$\left.\begin{array}{l} 6a-4b+3c \\ 3a+6b-4c+4d \\ \quad a+2b+2c-d \\ 5a-b+c+2d+4e \end{array}\right\} \text{polinomii da sommare}$$

Somma ridotta: $15a+3b+2c+5d+4e$

Le lettere si possono scrivere con quell'ordine che si vuole; nondimeno sembra essersi convenuto di seguire l'ordine alfabetico.

In quanto alla riduzione dei termini simili, è chiaro che i termini simili dello stesso segno si sommano in un solo; e nei termini simili di segno diverso, si sottrae il coefficiente minore dal maggiore, e si dà al resto unito alla lettera comune il segno del maggior coefficiente.

Questa riduzione dei termini simili si applica, come si vedrà, a tutte le operazioni algebriche.

ARTICOLO II.

Della sottrazione.

—

Sottrazione e regola generale per la sottrazione di un polinomio da un altro.

—

§ 5. Sottrazione e regola generale per la sottrazione di un polinomio da un altro.

Per sottrarre il numero b dal numero a, secondo la notazione convenuta, si scriverà $a-b$; medesimamente se si dovesse ancora sottrarre c da $a-b$, si scriverebbe $a-b-c$.

Si debba ora sottrarre l'espressione $c-d$ dall'espressione $a-b$;

Si potrà primieramente indicare la sottrazione nella maniera seguente:

$a-b-(c-d)$; scrivendo prima la quantità *minuenda*, quindi la quantità *sottraenda* rinchiusa tra due parentesi, e facendo precedere a questa seconda, il segno $-$.

Ma volendo ridurre il risultato ad un solo polinomio, ecco come bisogna ragionare.

Se da $a-b$ si volesse sottrarre c tutto intero, il risultato sarebbe $a-b-c$; ma siccome non si deve sottrarre tutto il numero c, ma solamente c diminuito prima di d, è chiaro che sottraendo c, si sottrae di troppo tutto il numero d, che dovea levarsi da c prima di fare la sottrazione; il risultato ottenuto è dunque più piccolo del vero, di un numero d'unità eguale a d, e per ricondurlo al suo giusto valore, bisognerà aggiungere d all'espressione $a-b-c$, il che darà $a-b-c+d$ pel vero resto cercato.

Questo ragionamento potendosi applicare a tutti i casi in cui

il polinomio *sottraendo* contenga uno o più termini *negativi*, dà luogo alla seguente regola.

Per sottrarre un polinomio da un altro polinomio, bisogna cangiare i segni a tutti i termini del polinomio sottraendo, cioè cangiare il segno + nel segno —, ed il segno — nel segno +, e scrivere questo polinomio, coi segni così cangiati, di seguito al minuendo, e fare poscia la riduzione dei termini simili.

Primo esempio.

Minuendo . . . $6a-4b+2c$
Sottraendo . . . $2a-8b+4d$

Resto . . . $6a-4b+2c-2a+8b-4d.$
Riduzione. . . $4a+4b+2c-4d.$

Secondo esempio.

Minuendo . . . $25a-9b-4c+12d$
Sottraendo . . . $18a-27b+5c-4d$

Resto . . . $25a-9b-4c+12d-18a+27b-5c+4d.$
Resto ridotto . . . $7a+18b-9c+16d.$

ARTICOLO III.

Della moltiplicazione.

Moltiplicazione di monomii positivi; esponente; regola dei coefficienti, degli esponenti, e delle lettere.— Moltiplicazione dei polinomii e regola dei segni. — Regola generale per la moltiplicazione dei polinomii.

---

§ 6. Moltiplicazione di monomii positivi; esponente; regola dei coefficienti, degli esponenti, e delle lettere.

Per indicare la moltiplicazione del numero a pel numero b, si scrive $a \times b$, oppure $a.b$, oppure più brevemente ab senza interposizione di segno fra le due lettere, e si pronuncia a moltiplicato per b, o solamente ab: la terza notazione è propria solamente dell'Algebra, ed ognun vede che non potrebbe aver luogo nei numeri scritti in cifre ordinarie.

La moltiplicazione dei tre fattori a, b, c si indicherà parimente per $a \times b \times c$, oppure per abc, e così per un numero qualunque di fattori monomii.

Se i fattori letterali avessero coefficienti numerici, questi si moltiplicheranno secondo le regole dell'Aritmetica; giacchè si sa che l'ordine dei fattori non influisce sul prodotto.

Così $3a \times 4b$ darebbe $12ab$; e
$2a \times 3b \times 4c = 24abc$.

Se i fattori di una moltiplicazione fossero tutti eguali, e rappresentati perciò da una stessa lettera, secondo la notazione precedente, questa lettera si dovrebbe scrivere nel prodotto tante volte

quanti sono i fattori eguali; così $a \times a$ darebbe aa; $bb \times bbb$ darebbe $bbbbb$, ecc.; ma in questo caso, per abbreviare la scrittura, si è convenuto di scrivere una sola volta la lettera, o il fattore ripetuto, e di significare con un numero, che si chiama *esponente*, quante volte la lettera è fattore in quel prodotto.

L'esponente si colloca alla destra, e un po' al dissopra della lettera. Così in vece di aa si scriverà a^2; ed in vece di aaa si scriverà a^3. Parimente in vece di $aaabbcccc$ si scriverà $a^3b^2c^4$; e si pronuncia a tre, b due, c quattro.

Bisogna però guardarsi dal confondere l'esponente col coefficiente; e non prendere, ad esempio, a^2 per $2a$, oppure a^3 per $3a$. Il coefficiente, come si è veduto, indica sempre una somma di numeri eguali, mentre l'esponente indica un prodotto di fattori eguali. Così $2a = a + a$, ed $a^2 = a \times a$; di modo che se $a = 5$, $2a = 10$, ed $a^2 = 25$.

Da quanto si è qui avanti esposto, s'inferisce che per moltiplicare l'uno per l'altro due monomii che contengono alcune lettere comuni con diversi esponenti, basterà sommare gli esponenti delle lettere simili del moltiplicando e del moltiplicatore.

Così per moltiplicare a^2 per a^3, si scriverà a^5; il che è evidente, perchè a essendo due volte fattore in a^2, e tre volte fattore in a^3, deve essere cinque volte fattore nel loro prodotto.

Similmente $a^4b^3c \times a^3b^2cd = a^7b^5c^2d$; e
$4a^3b \times 5a^2b^3 = 20a^5b^4$.

Per mettere in pratica questa regola, bisogna ricordarsi che una lettera senza esponente è riguardata come avente per esponente l'unità. Così a è lo stesso che a^1.

Notisi qui che il prodotto di una quantità moltiplicata per se stessa, si chiama quadrato o seconda potenza di questa quantità: così 100 è il quadrato di 10, ed a^2 è il quadrato di a.

Il prodotto poi di una quantità moltiplicata pel suo quadrato, si chiama cubo, o terza potenza di questa quantità: così $1000 = 10 \times 100$, è il cubo di 10 ed $a^3 = a \times a^2$, è il cubo di a.

Generalmente si chiama *potenza* ogni prodotto, i cui fattori

sono tutti eguali fra loro, ricavandosi la denominazione della potenza dal numero dei fattori: così l'esponente di una quantità indica a qual potenza essa è innalzata. In a^3 l'esponente 3 indica la terza potenza di a.

§ 7. Moltiplicazione dei polinomii, e regola dei segni.

Passando ora alla moltiplicazione delle quantità polinomie o complesse, si debba per esempio moltiplicare $a+b+c$ per $d+e$; quest'operazione s'indica rinchiudendo ciascun fattore tra due parentesi, e scrivendoli nella maniera seguente: $(a+b+c)$ $(d+e)$, che si pronuncia $a+b+c$ moltiplicato per $d+e$; per isviluppare il prodotto in un solo polinomio, si seguirà lo stesso andamento dell'Aritmetica riguardo alla moltiplicazione dei numeri complessi: cioè si moltiplicherà successivamente ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, e si troverà facilmente per prodotto $ad+bd+cd+ae+be+ce$.

Così l'operazione si riduce alla moltiplicazione di soli monomii; e se i termini dei due fattori avessero tutti il segno $+$, la moltiplicazione dei polinomii non presenterebbe alcuna difficoltà, e basterebbero per ciò le tre regole spiegate superiormente riguardo ai monomii; cioè la regola delle lettere, quella dei coefficienti e quella degli esponenti. Ma siccome in uno dei due fattori, o in ambedue possono trovarsi termini *negativi*, per compimento della regola è ancora necessario di esaminare qual segno debba avere il prodotto di un termine di segno $+$ moltiplicato per un altro di segno $-$, o *viceversa*; e qual segno si debba dare al prodotto di un termine di segno $-$ per un altro parimenti di segno $-$.

Per quest'oggetto sia da moltiplicare $a-b$ per c, il che significa prendere c volte la quantità $a-b$; per questo basterebbe scrivere c volte di seguito $a-b$, e fare quindi la somma, ossia la riduzione dei termini simili; si troverebbe così c volte $a-c$ volte b, ossia $ac-bc$.

Si può ancora fare il seguente ragionamento: moltiplicando a tutto intero per c si avrà ac per prodotto; ma questo prodotto ac contiene c volte di troppo la quantità b, che dovea levarsi da a prima di fare la moltiplicazione; dunque per ottenere il vero prodotto bisognerà sottrarre c volte b ossia bc da ac, il che darà $ac-bc$ pel prodotto dimandato. Così $(a-b)c=ac-bc$. Dunque la moltiplicazione di un termine positivo per un termine negativo, e *viceversa*, dà un prodotto negativo.

Si debba ancora moltiplicare $a-b$ per $c-d$; il che si indica così $(a-b)$ $(c-d)$: per ottenere il prodotto in un solo polinomio, si comincia a moltiplicare $a-b$ per c, il che dà, come si vede nell'esempio precedente, $ac-bc$; ma si osserverà, che non si dovea moltiplicare $a-b$ per c tutto intero, ma solamente per c diminuito di d; così il prodotto $ac-bc$ eccede il vero prodotto, poichè contiene d volte di troppo la quantità $(a-b)$, ossia contiene di troppo $ad-bd$; dunque per ricondurre il primo prodotto al suo giusto valore, bisognerà sottrarre $(ad-bd)$ da $(ac-bc)$; il che darà, secondo la regola della sottrazione, $ac-bc-ad+bd$.

Dunque $(a-b)$ $(c-d)=ac-bc-ad+bd$: questo risultamento ci fa vedere che il prodotto di $-b$ per $-d$ è $+bd$; cioè il prodotto di due termini negativi è positivo.

§ 8. Regola generale per la moltiplicazione dei polinomii.

Dalle esposte considerazioni si deduce la seguente regola per la moltiplicazione di un polinomio qualunque per un altro polinomio qualunque.

Si scrive il moltiplicatore sotto il moltiplicando, e cominciando dalla sinistra si moltiplica ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, osservando, nelle singole moltiplicazioni, le regole notate di sopra pei monomii, cioè la regola dei segni, quella dei coefficienti, quella delle lettere, e quella degli esponenti; si formeranno così tante file di prodotti parziali, quanti sono i termini del moltiplicatore. La somma di

tutti questi prodotti parziali darà il prodotto totale, su cui si farà la solita riduzione de'termini simili.

Esempio.

Moltiplicando	$2a+bc-2b^2$
Moltiplicatore	$2a-bc+2b^2$
1° prodotto parziale	$4a^2+2abc-4ab^2$
2° id.	$-2abc-b^2c^2+2b^3c$
3° id.	$+4ab^2+2b^3c-4b^4$
Prodotto totale	$4a^2-b^2c^2+4b^3c-4b^4$.

Il primo prodotto parziale contiene i prodotti di tutti i termini del moltiplicando pel primo termine $2a$ del moltiplicatore; il secondo prodotto parziale contiene i prodotti di tutto il moltiplicando per $-bc$ secondo termine del moltiplicatore; ed il terzo prodotto parziale contiene i prodotti del moltiplicando pel terzo termine $2b^2$ del moltiplicatore.

Nel formare i prodotti parziali bisogna guardare, fin che si può, di scrivere i termini simili immediatamente gli uni sotto gli altri, onde agevolarne la riduzione.

L'esercizio renderà agevole l'applicazione di queste regole. Ecco alcuni esempi assai facili, sui quali si verranno facendo alcune utili osservazioni.

Primo esempio.

Moltiplicare	$a+b$
per	$a+b$
	a^2+ab
	$+ab+b^2$
prodotto	$a^2+2ab+b^2$.

Quest'esempio (§ 6) dimostra che il quadrato della somma $a+b$ di due numeri contiene il quadrato a^2 del primo numero, più il doppio prodotto $2ab$ del primo numero pel secondo, più il quadrato b^2 del secondo numero.

Secondo esempio.

Moltiplicare	$a-b$
per	$a-b$
	a^2-ab
	$-ab+b^2$
prodotto	$a^2-2ab+b^2$.

Si scorge da quest'esempio che il quadrato della differenza di due numeri contiene il quadrato a^2 del primo numero, meno il doppio prodotto $2ab$ del primo numero pel secondo, più il quadrato b^2 del secondo.

Terzo esempio.

$$\begin{array}{lr} \text{Moltiplicare} \ldots & a+b \\ \text{per} \ldots\ldots & a-b \\ \hline & a^2+ab \\ & -ab-b^2. \\ \hline \text{prodotto} \ldots\ldots & a^2-b^2. \end{array}$$

Quest'esempio fa palese, che il prodotto della somma $a+b$ di due numeri, moltiplicata per la loro differenza $a-b$, è eguale alla differenza a^2-b^2 dei quadrati dei due dati numeri.

Quarto esempio.

$$\begin{array}{lr} \text{Moltiplicare} \ldots & a^2+2ab+b^2 \\ \text{per} \ldots\ldots & a+b \\ \hline & a^3+2a^2b+ab^2 \\ & +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline \text{prodotto} \ldots & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

Il moltiplicando essendo il quadrato della somma $a+b$ di due numeri, ed il moltiplicatore essendo la somma di questi numeri, il prodotto rappresenterà il cubo del binomio $(a+b)$ (§ 6); dunque il cubo di un binomio $a+b$ contiene quattro parti, cioè:

1° Il cubo a^3 del primo numero a;

2° Il triplo prodotto $3a^2b$ del quadrato del primo numero pel secondo;

3° Il triplo prodotto $3ab^2$ del primo numero pel quadrato del secondo;

4° Il cubo b^3 del secondo numero.

È già stato qui avanti avvertito, che per indicare la moltiplicazione di due o più polinomii, si racchiude ciascun fattore polinomio fra due parentesi, e si scrivono così uniti sulla stessa linea.

Se i fattori polinomii fossero eguali, si può abbreviare la notazione scrivendo un solo di questi fattori, e notando, con un esponente fuori della parentesi, il numero delle volte che deve essere fattore nel prodotto. Così $(a+b)^2$ significa

$$(a+b)\ (a+b)=a^2+2ab+b^2.$$

$(a+b)^3$ significa

$$(a+b)\ (a+b)\ (a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ARTICOLO IV.

Della divisione.

Divisione dei monomii e binomii; regola dei segni, dei coefficienti, degli esponenti e delle lettere. — Simbolo dell'unità: esponenti negativi. — Divisione dei polinomii, e regola generale per la divisione dei medesimi.

---

§ 6. Divisione dei monomii e binomii; regola dei segni, dei coefficienti, degli esponenti e delle lettere.

Si indica la divisione del numero a pel numero b scrivendo $\frac{a}{b}$, oppure $a{:}b$, e si pronuncia a diviso per b: la prima notazione è più usitata. Così pure $\frac{a+b}{c+d}$ significa la divisione di $a+b$ per $c+d$.

La divisione algebrica come la divisione aritmetica ha per oggetto di scoprire uno dei fattori di un prodotto dato, quando si conosce l'altro fattore. Per conseguenza il quoziente moltiplicato pel divisore deve riprodurre il dividendo col suo proprio segno.

Applicando questo principio alla divisione delle quantità monomie, se ne deducono le quattro regole seguenti:

Regola dei segni. Un termine col segno $+$ diviso per un altro col segno $+$, ed un termine di segno — diviso per un altro di segno —, danno un quoziente col segno $+$: un termine di segno $+$ diviso per un altro di segno —, oppure un termine di segno — diviso per un altro di segno $+$, danno un quoziente di segno —: più brevemente si dirà che i *quozienti che provengono da termini dello stesso segno sono positivi: ed i quozienti che provengono da termini di segno contrario sono negativi.*

Regola dei coefficienti. Si divide il coefficiente del dividendo per quello del divisore secondo le regole dell'Aritmetica.

Regola delle lettere. Dalle lettere del dividendo si tolgono tutte quelle che sono comuni al divisore, e le rimanenti lettere formeranno il quoziente.

Regola degli esponenti. Quando il dividendo contiene una o più lettere comuni al divisore con esponenti diversi, si sottraggono gli esponenti delle lettere del divisore da quelli delle lettere simili del dividendo, ed i resti di queste sottrazioni saranno gli esponenti delle stesse lettere simili nel quoziente.

Tutte queste regole sono una conseguenza necessaria di quelle della moltiplicazione e del principio citato, che il prodotto del divisore pel quoziente deve eguagliare il dividendo: e ad eccezione di quella dei segni, le altre tre hanno tutte uno stesso ed unico fine, che è quello di togliere dal dividendo tutti i fattori del divisore, e mettere così in evidenza i fattori restanti che debbono formare il quoziente. Eccone alcuni esempi:

$\frac{abcd}{bd}$ dà per quoziente ac;

$$\frac{amp}{-ap}=-m; \qquad \frac{-4abc}{2ac}=-2b$$

$$\frac{-apr}{-ar}=+p; \qquad \frac{a^7}{a^3}=a^4;$$

$$\frac{75a^4b^3c^2de}{25a^2bcd}=3a^2b^2ce.$$

§ 10. Simbolo dell'unità; esponenti negativi.

Ciascheduna quantità divisa per se stessa dà per quoziente l'unità; così: $\frac{a^3}{a^3}=1$; $\frac{b^2}{b^2}=1$; ecc.: ma facendo la divisione secondo la regola degli esponenti, $\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0$; e $\frac{b^2}{b^2}=b^{2-2}=b^0$;

dunque bisogna conchiudere che $a^0=1$, $b^0=1$, e in generale che *qualunque quantità coll' esponente zero è il simbolo della unità*, perchè rappresenta il quoziente di una quantità divisa per se stessa.

La notazione a^0, o qualunque altra simile, si lascia qualche volta in vece dell'unità, per conservare la traccia di una lettera la quale entrando prima nel calcolo, ha dovuto sparire per l' effetto delle semplificazioni.

Quando le lettere, o i fattori del divisore non sono tutti comuni al dividendo, allora la divisione non potendosi effettuare, si indicherà sotto la forma di frazione: e questa frazione, quando si può, si dovrà semplificare sopprimendo i fattori comuni ai due termini, come nell'Aritmetica. Così:

$$\frac{5ab^2c}{20acd^2}=\frac{b^2}{4d^2} \qquad \frac{4a^2bc}{12a^2b^3cd}=\frac{1}{3b^2d},$$

$$\frac{a^3}{a^5}=\frac{1\times a^3}{a^2\times a^3}=\frac{1}{a^2};$$

Si deve qui notare, che dividendo a^3 per a^5 secondo la regola degli esponenti si avrebbe

$$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2};$$

dunque bisogna conchiudere che $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$;

similmente $\frac{b^4}{b^7}=b^{4-7}=b^{-3}=\frac{1}{b^3}$; dunque generalmente una quantità qualunque coll'esponente negativo è eguale all'unità divisa per la stessa quantità coll'esponente positivo.

§ 11. Divisione de' polinomii, e regola generale per la divisione dei medesimi.

Passando alla divisione dei polinomii, si debba, per esempio, dividere

$$20ab^5+4a^6-25a^2b^4-4b^6$$

per . . . $2b^3+2a^3-5ab^2$:

in questo caso non si può più conoscere a prima vista se il divisore è, o non è fattore del dividendo, perchè non si hanno separatamente i prodotti parziali del divisore per ciascun termine del quoziente. Ma considerando il dividendo come il prodotto del divisore pel quoziente cercato, la pratica della moltiplicazione ci suggerisce, che i termini contenenti la lettera a, per esempio, col maggior esponente nei due fattori, danno al prodotto un termine contenente parimente la stessa lettera a, col maggior esponente, e che perciò non potrà ridursi con nissun altro termine.

Dunque il termine $4a^6$ del dividendo è il prodotto esatto del termine $2a^3$ del divisore pel termine del quoziente contenente a col maggior esponente. E così dividendo $4a^6$ per $2a^3$, si avrà $2a^3$ al quoziente: moltiplicando tutto il divisore pel quoziente trovato $2a^3$, e sottraendo il prodotto dal dividendo, il resto sarà il prodotto del divisore per gli altri termini del quoziente.

Si dovrà dunque ancora dividere questo resto pel divisore; il che ci ricondurrà al medesimo ragionamento, ed alla stessa conseguenza. Da queste osservazioni risulta la seguente regola:

1° *Si debbono ordinare i termini del dividendo e del divisore per riguardo agli esponenti di una stessa lettera; cioè disporre in modo i termini, che gli esponenti di quella lettera cominciando dal più grande, vadano diminuendo da un termine al termine seguente.*

2° *Si divide il primo termine del dividendo per il primo del divisore, e si scrive il quoziente al suo posto.*

3° *Si moltiplica tutto il divisore pel quoziente trovato, e si scrivono sotto al dividendo i termini del prodotto coi segni cangiati per farne la sottrazione; fatta la riduzione dei termini simili, si scrive al di sotto il resto ridotto, ed ordinato riguardo alla stessa lettera, e si trova il secondo termine del quoziente, operando come si è fatto per trovare il primo, e così sino al fine.*

Ecco l'ordinamento dei termini, e l'operazione.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & 2a^3-5ab^2+2b^3 \\
 & -4a^6+10a^4b^2-4a^3b^3 & \overline{2a^3+5ab^2-2b^3} \\
\hline
1^\circ \text{ resto} \ldots & 10a^4b^2-4a^3b^3-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & \\
 & -10a^4b^2+25a^2b^4-10ab^5 & \\
\hline
2^\circ \text{ resto} \ldots & -4a^3b^3+10ab^5-4b^6 & \\
 & +4a^3b^3-10ab^5+4b^6 & \\
\hline
3^\circ \text{ resto} \ldots & 0. &
\end{array}
$$

Si divide il primo termine del dividendo $4a^6$ pel primo del divisore $2a^3$, e si ha il primo termine del quoziente $2a^3$; si moltiplica tutto il divisore pel quoziente $2a^3$, e sottraendo il prodotto dal dividendo si ottiene un primo resto; si divide nuovamente il primo termine $10a^4b^2$ del resto pel primo del divisore $2a^3$, e si ottiene per secondo termine del quoziente $5ab^2$; moltiplicando il divisore per $5ab^2$, e sottraendo il prodotto dal primo resto, si ottiene un secondo resto; dividendo parimente il primo termine $-4a^3b^3$ del secondo resto pel primo del divisore $2a^3$, si trova $-2b^3$ per terzo termine del quoziente esatto, perchè facendo la moltiplicazione e la sottrazione, il terzo resto è zero.

Aggiungonsi ancora alcuni esempi facili:

Dividendo . . .	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$a^2-2ab+b^2$	divisore.
	$-a^3+2a^2b-ab^2$	$a-b$	quoziente.
1° resto . . .	$-a^2b+2ab^2-b^3$		
	$+a^2b-2ab^2+b^3$		
2° resto . . .	0.		

Dividendo . . .	a^3-b^3	$a-b$	divisore.
	$-a^3+a^2b$	a^2+ab+b^2	quoziente
1° resto . . .	a^2b-b^3		
	$-a^2b+ab^2$		
2° resto . . .	ab^2-b^3		
	$-ab^2+b^3$		
3° resto . . .	0.		

Da questa operazione risulta che la differenza dei cubi di due numeri è sempre esattamente divisibile per la differenza degli stessi due numeri.

Facendo $b=1$ risulta $\frac{a^3-1}{a-1}=a^2+a+1$; il che mostra che il cubo di un numero diminuito di 1 è sempre esattamente divisibile pel numero stesso diminuito di 1.

Dividendo . . .	a^3+b^3	$a+b$	divisore.
	$-a^3-a^2b$	a^2-ab+b^2	quoziente.
1° resto . . .	$-a^2b+b^3$		
	$+a^2b+ab^2$		
2° resto . . .	ab^2+b^3		
	$-ab^2-b^3$		
3° resto . . .	0.		

Quindi si scorge che la somma dei cubi di due numeri è sempre esattamente divisibile per la somma degli stessi due numeri.

E facendo $b=1$, sarà $\frac{a^3+1}{a+1}=a^2-a+1$; cioè il cubo di un numero accresciuto dell'unità è sempre esattamente divisibile pel numero stesso accresciuto dell'unità.

ARTICOLO V.

Delle frazioni algebriche.

Operazioni delle frazioni algebriche basate sugli stessi principii delle frazioni numeriche — Osservazione per la riduzione delle frazioni periodiche miste in frazioni ordinarie.

---

§ 12. Operazioni delle frazioni algebriche basate sugli stessi principii delle frazioni numeriche.

I principii, sui quali è fondata la teorica delle frazioni numeriche, essendo indipendenti dai valori particolari dei loro termini, convengono egualmente alle frazioni algebriche; ed il calcolo di queste è soggetto alle stesse regole del calcolo di quelle.

Onde per non ripetere gli stessi ragionamenti già fatti nell'Aritmetica, basterà limitarsi ad alcuni esempi per mostrare l'applicazione di ciascuna regola, e per richiamarle e confermarle nella memoria.

Così la somma delle frazioni $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$ (§ 43) sarà eguale ad $\frac{a+b+c}{d}$; e la differenza delle frazioni $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ (§ 44) sarà $\frac{a-b}{d}$. Se le frazioni hanno denominatori diversi, si debbono prima ridurre allo stesso denominatore (41); quindi si farà la somma, o la sottrazione secondo le note regole. Così

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf}{bdf}+\frac{cbf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Il prodotto di $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$; e quello di $\frac{a}{mb}\times b=\frac{a}{m}$;

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\ (\S\ 45);\qquad \frac{a+b}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}.$$

Il quoziente di $\frac{a}{b}:c$ è eguale ad $\frac{a}{bc}$; $\frac{am}{b}:m=\frac{a}{b}$; $a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$;

$$a:\frac{ab}{c}=\frac{ac}{ab}=\frac{c}{b};\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right):\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{ac+b}{c}:\frac{mq+p}{q}=\frac{q(ac+b)}{c(mq+p)}.$$

Si noti qui che per ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione, si moltiplica, come nell'Aritmetica, l'intiero pel denominatore della frazione, si aggiugne al prodotto il numeratore, e si conserva il denominatore primitivo. Così

$$2a-3b+\frac{c}{2a+3b}=\frac{4a^2-9b^2+c}{2a+3b}.$$

Le frazioni algebriche si semplificano colla stessa regola delle frazioni numeriche; cioè togliendo ai due termini i loro fattori comuni, o dividendoli per un comune divisore.

Così $\frac{abc}{b^2c}$, dividendone i due termini per bc, diventa $\frac{a}{b}$; e $\frac{8a^2b-5abc}{12ab^2-8abd}$ dividendone i due termini per $4ab$ divento $\frac{2a-c}{3b-2d}$.

Ancorchè i due termini della frazione sieno polinomii, si possono sempre agevolmente scoprire i fattori monomii comuni ad entrambi. Perchè questi debbono entrare in tutti i termini

dei due polinomii; ma non si possono così facilmente scoprire in tutti i casi i fattori comuni polinomii: per questo bisognerebbe ricorrere alla ricerca del massimo comune divisore dei due polinomii, che esprimono i due termini della frazione.

Ma i limiti di questo trattato non permettono di dare un più grande sviluppo a queste materie.

§ 13. Osservazioni per la riduzione delle frazioni periodiche miste in frazioni ordinarie.

Si farà qui un'osservazione, che potrà facilitare la riduzione delle frazioni periodiche miste in frazioni ordinarie.

Nell'Aritmetica (§ 60) si trovò

$$0{,}1231717\ldots=\frac{123\times 99+17}{99000}:$$

sostituendo $100-1$ in vece di 99, il secondo membro diventerà

$$\frac{123(100-1)+17}{99000}=\frac{12300-123+17}{99000}=\frac{12317-123}{99000}.$$

Il che dimostra, *che una frazione periodica mista è equivalente ad una frazione ordinaria avente per numeratore un numero formato dalle cifre non periodiche e da quelle del primo periodo diminuito della parte non periodica, e per denominatore tante cifre 9 quante sono quelle del periodo seguite da tanti zero quante sono le cifre non periodiche.*

CAPO III.

Formazione delle potenze de' numeri ed estrazione delle radici quadrate e cubiche.

Potenze di un numero, e gradi delle potenze: quadrato; cubo. — Radici quadrate e cubiche; radici quarte, ecc. — Radici immaginarie; formazione del quadrato di un numero composto di decine e di unità. — Estrazione della radice quadrata dei numeri interi. — Estrazione della radice quadrata per approssimazione.

§ 14. Potenze di un numero e gradi delle potenze; quadrato; cubo.

Allorquando un numero si moltiplica successivamente una, due, tre ecc. volte per se stesso, i diversi prodotti che ne risultano si chiamano *potenze* di quel numero. Le potenze si distinguono in gradi secondo il numero dei loro fattori eguali. Così un numero qualunque, il 3, per esempio, è la prima potenza di se stesso; il 3 moltiplicato una volta per se stesso dà 9, che è la seconda potenza, o il quadrato di 3; il 3 moltiplicato due volte per se stesso dà 27, che è la terza potenza, o il cubo di 3; e moltiplicato 3 volte per se stesso dà 81, che è la quarta potenza di 3, ecc. Più generalmente il numero a è la prima potenza di se stesso; a^2 è la seconda potenza, o il quadrato di a; a^3 è la terza potenza, o il cubo di a; a^4 sarebbe la quarta potenza: a^5 la quinta ecc.

Si noti che il grado o l'esponente della potenza indica il numero de' fattori eguali moltiplicati insieme; e che il numero delle moltiplicazioni necessarie per fare una data potenza, è indicato dall'esponente o grado della potenza diminuito di 1.

Le denominazioni di quadrato e di cubo invece di seconda e di terza potenza derivano dalla Geometria.

La quarta potenza si chiama anche qualche volta quadrato-quadrato; e la sesta si chiama quadrato cubo, oppure cubo quadrato.

Si notano nella tavola seguente i dieci primi numeri coi loro corrispondenti quadrati e cubi, avvertendo di ritenerli a memoria per poter facilmente servirsene nelle operazioni che seguono.

Numeri	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Quadrati	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.
Cubi	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.

§ 15. Radici quadrate e cubiche, radici quarte ecc.

Il numero, dalle cui ripetute moltiplicazioni nascono le successive potenze, dicesi la *radice* di queste; e prende il nome di radice *quadrata*, di radice *cubica*, di radice *quarta* o *quinta* ecc. secondo che si mette a confronto col quadrato, col cubo, colla quarta o colla quinta potenza ecc.

Quindi per radice quadrata o cubica di un numero dee intendersi un altro numero, il cui quadrato od il cui cubo è eguale al numero proposto. Così nella tavola precedente si vede, che il 3 è la radice quadrata di 9, e la radice cubica di 27 ecc.

Le radici di qualunque grado si indicano tutte col seguente segno $\sqrt{}$, che si chiama il segno *radicale*; e si distinguono fra loro col mezzo di un indice, che si scrive nell'apertura del segno radicale; e quando non c'è indice, s'intende sempre la radice quadrata.

Così $\sqrt{a}$ indica la radice quadrata del numero a; $\sqrt[3]{a}$

esprime la radice cubica, e $\sqrt[4]{a}$ la radice quarta dello stesso numero a.

$$\sqrt{49}=7; \quad \sqrt[3]{125}=5; \quad \sqrt[4]{81}=3;$$

$$\sqrt{a^2}=a; \quad \sqrt[3]{a^3b^3}=ab.$$

Dalla tavola de' quadrati e de'cubi del paragrafo precedente si scorge facilmente, che non tutti i numeri sono quadrati o cubi perfetti, e che quindi non possono tutti avere per radice quadrata o cubica un numero intero.

§ 16. Radici immaginarie; formazione del quadrato di un numero composto di decine e di unità.

Da quanto si è detto, si potrà facilmente formare una potenza qualunque di un numero intero o frazionario; bastando per questo moltiplicare il numero tante volte per se stesso, quante il richiede il grado della potenza: ma il ritornare da una data potenza alla sua radice, o, come si dice ordinariamente, estrarre da un dato numero la radice di un dato grado, è un'operazione, che non può eseguirsi colle sole regole antecedentemente esposte. Basterà esporre il modo di estrarre la radice quadrata, e cubica da un numero qualunque intero o frazionario, perchè la conoscenza di queste radici è di grande importanza nella Geometria, e nelle altre scienze positive. Ma primieramente si faranno a quest'oggetto alcune utili osservazioni.

1° Dalla definizione del quadrato di un numero, e dalla regola dei segni, risulta che non può darsi un quadrato negativo; perchè $-a \times -a$ dà a^2 come $a \times a$; e la quantità $-a^2$ provegnendo da $+a \times -a$ non è un quadrato; dunque la radice quadrata di un numero negativo è impossibile, e si chiama perciò *immaginaria*: per opposizione a questa nuova specie di espressioni, tutte le altre quantità diconsi *reali*.

2° Un quadrato qualunque può egualmente essere prodotto moltiplicando per se stesso un numero positivo, od un numero negativo; dunque le radici quadrate debbono essere affette dal doppio segno $+$ o $-$.

Così $\sqrt{a^2}=\pm a$; $\sqrt{16}=\pm 4$: che si pronuncia più o meno 4.

3° Secondo la regola dei segni il cubo di una quantità positiva è positivo, ed il cubo di una quantità negativa è negativo; dunque la radice cubica deve avere il segno del numero, dal quale si estrae.

4° Si sa che $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Paragonando con questa formola il quadrato di un numero di due cifre, cioè composto di decine e di unità, di 25 per esempio, si avrà:

$$(25)^2=(20+5)^2=400+2\cdot 20\cdot 5+25=625.$$

Dal che si vede che il quadrato di un numero composto di decine e di unità contiene il quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità. Questa proprietà si può anche scoprire osservando l'andamento della moltiplicazione di 25 per 25, o di qualunque altro numero di due cifre per se stesso.

Se il numero avesse più di due cifre, e contenesse centinaia o migliaia ecc., si potrà nulladimeno considerare come composto di sole decine e di unità; così per esempio, il numero 125 si considera formato da 12 decine più 5 unità; ed il suo quadrato contiene le stesse parti; cioè:

1° Il quadrato delle 12 decine	=	14400
2° Il doppio prodotto delle decine per le unità	=	1200
3° Il quadrato delle unità	=	25
Onde sarà $(125)^2=125\times 125$	=	15625

Da quest'ultima osservazione risulta principalmente il modo,

e la spiegazione dell'operazione particolare, che si chiama estrazione della radice quadrata.

§ 17. Estrazione della radice quadrata dai numeri interi.

La radice quadrata in un numero è un altro numero, che, moltiplicato per se stesso, dà al prodotto il primo numero proposto.

Se il numero proposto non ha più di due cifre, la tavola (§ 14) dei quadrati dei dieci primi numeri mostrerà la radice esatta quando il numero è un quadrato perfetto, o la parte intera della radice, quando il numero non è un quadrato perfetto.

Così per esempio $\sqrt{64}=8$, e $\sqrt{54}=7$ più una quantità minore dell'unità, che, come si vedrà in seguito, non potrà valutarsi che per approssimazione.

Si debba estrarre la radice quadrata dal numero 1225.

Questo numero essendo più grande di 100, che è il quadrato di 10, e più piccolo di 10000, che è il quadrato di 100, avrà la sua radice compresa tra 10 e 100, questa radice sarà dunque un numero di due cifre, e conterrà decine ed unità; ed il numero proposto, che n'è il quadrato, dovrà dunque contenere le tre parti di sopra notate, cioè il quadrato delle decine della radice; più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità; se queste tre parti fossero separate tra di loro, si otterrebbe facilmente la cifra delle decine, e quella delle unità della radice, prendendo separatamente la radice del quadrato delle decine, e quella del quadrato delle unità: ma perchè queste tre parti si trovano unite in modo, che non si possono discernere immediatamente l'una dall'altra, bisogna appigliarsi ad un altro partito: per questo si osserva che il quadrato delle decine esprimendo sempre un [illegible] intero di centinaia, non può avere cifre significative [illegible]dine inferiore al centinaio, epperciò le due ultime cifre [illegible] non [illegible]tendo far parte del quadrato delle decine, si

separano con una virgola come si vede qui accanto; il quadrato delle decine sarà dunque il più grande quadrato contenuto nella prima parte 12, la quale contiene inoltre le centinaia provenienti dal doppio prodotto delle decine per le unità: ora il più grande quadrato contenuto in 12 è 9, la cui radice è 3; si scrive dunque il 3 alla destra del numero proposto, nel luogo, dove nella divisione si scrive il divisore, e saranno le 3 decine della radice cercata; sottraendo da 12 il quadrato di 3, cioè 9, resta 3; a destra di questo resto si abbassino le due ultime cifre del numero proposto; e si avrà 325, *che conterrà ancora il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità.* Ma decine moltiplicate per unità non potendo dare al prodotto unità d'ordine inferiore alle decine, l'ultima cifra 5 non farà parte del doppio prodotto delle decine per le unità, epperò questo doppio prodotto sarà tutto contenuto nel 32, che si separa perciò dalla cifra 5 con una virgola.

12,25	35
9	
32,5	65
3 25	5
0	

Dividendo dunque 32 per 6 doppio delle 3 decine già trovate, il quoziente 5 è la cifra delle unità della radice; qualche volta questo quoziente è troppo grande, perchè il dividendo 32, o qualunque altro che ne tiene il luogo, oltre al doppio prodotto delle decine per le unità, contiene ancora le decine provegnenti dal quadrato delle unità, che possono alterare il quoziente, rendendolo più grande di qualche unità. Dunque prima di scrivere alla radice il quoziente trovato 5, si deve verificare; e per verificarlo basta scriverlo alla destra del divisore 6, il che dà 65, e moltiplicare 65 per lo stesso quoziente 5; il prodotto, che contiene evidentemente il quadrato delle unità, più il doppio prodotto delle decine per le unità, è in questo caso 325, che sottratto dal resto della prima operazione, dà per risultato zero: il che prova che 35 è la radice quadrata esatta del numero proposto 1225.

Ma se il prodotto del numero formato dalle cifre del divisore, e da quella del quoziente pel quoziente stesso non po-

tesse sottrarsi dal dividendo unito all'ultima cifra separata, allora il quoziente, ossia la cifra che si deve scrivere alla radice è troppo grande, e bisognerà diminuirla di un'unità, e rifare la verificazione finchè la sottrazione possa effettuarsi: come si potrà vedere estraendo, secondo il ragionamento precedente, la radice quadrata del numero 1444.

Se il numero proposto avesse più di quattro cifre, e fosse per esempio 273529, la sua radice ne avrebbe più di due; ma il ragionamento sarebbe lo stesso, perchè si può sempre considerare la radice come unicamente composta di decine e di unità.

Così la radice di 273529 dovendo contenere decine ed unità, bisognerà separare con una virgola le due ultime cifre a destra 29, e cercare il quadrato delle decine nella parte restante a sinistra 2735 ; ma questa parte essendo composta di quattro cifre , la sua radice conterrà decine ed unità; dunque bisognerà separare le due ultime cifre 35 , e se restassero ancora più di due cifre , si continuerebbe medesimamente , finchè si arrivi ad un' ultima parte, a sinistra formata da due o una sola cifra.

27,35,29	523
25	
23,5	102
204	2
312,9	1043
3129	3
0.	

In questa maniera il numero sarà scomposto in membri binari, cioè di due cifre, come si vede qui accanto: e si prenderà la radice di 27, che è 5, e si scriverà al suo luogo; sottraendo da 27 il quadrato di 5, resta 2; abbassando a destra del resto la parte seguente 35, e separando l'ultima cifra, si dividerà 23 per 10, il quoziente 2 sarà la seconda cifra della radice: sottraendo da 235 il prodotto di 102 per 2, il resto sarà 31; abbassando a destra del resto 31 la terza parte 29, e separando l'ultima cifra 9, si dividerà 312 per 104 doppio delle decine trovate 52 , il quoziente 3 sarà la terza cifra della radice; perchè moltiplicando 1043 per 3, e sottraendo il prodotto da 3129 resta 0.

La radice cercata è dunque 523, come si può facilmente verificare moltiplicando questo numero per se stesso.

Dai due esempi precedenti si deduce la seguente regola, per estrarre la radice quadrata da un numero qualunque.

1° *Cominciando dalla destra si scomponga il numero proposto in membri binari per mezzo di virgole (eccettuato l' ultimo membro a sinistra, che può qualche volta averne una sola, il che succede sempre quando il numero delle cifre è impari); il numero dei membri sarà eguale al numero delle cifre della radice.*

2° *Si prende la radice del massimo quadrato contenuto nella prima parte a sinistra, questa sarà la prima cifra della radice; si sottragga il quadrato di questa prima cifra della prima parte, e si scriva il resto.*

3° *A lato del resto si abbassi la seconda parte del numero proposto, e separando l'ultima cifra a destra, si divida il restante pel doppio della radice trovata; il quoziente verificato sarà la seconda cifra della radice; e per verificarlo si scriva il quoziente trovato a destra del divisore, si moltiplichi il numero risultante pel quoziente stesso, e si sottragga il prodotto dal dividendo, riunendovi ad esso l'ultima cifra che ne era stata separata, e si scriva il resto.*

4° *A lato di questo secondo resto si abbassi la terza parte del numero proposto, si separi l'ultima cifra a destra, e si divida il rimanente pel doppio della radice già trovata; e continuando nell'anzidetta maniera, finchè tutte le parti del numero siano abbassate a destra dei successivi resti, si troverà la terza cifra della radice, e quindi le seguenti nella stessa guisa, che si è trovata la seconda.*

Per applicare questa regola all'estrazione della radice quadrata del numero seguente:

60,98,04,81	7809
49	
119,8	148
118 4	8
14048,1	15609
14048 1	9
0.	

diviso prima il numero in membri di due cifre, si dirà la radice prossima di 60 è 7 per 49, con 11 di resto; abbassando 98 a destra del resto 11, e separando l'ultima cifra 8, si divide 119 per 14 doppio della radice 7, si avrà per quoziente 8, che sarà la seconda cifra della radice, e per resto 14; abbassando a lato del resto 14 la terza parte 04, e separando l'ultima cifra 4, il restante numero 140 non può dividersi per 156 doppio della radice già trovata 78; questo indica che la radice non contiene unità dell'ordine delle decine, ma per conservare alle cifre già ottenute il loro valore relativo, si scriverà un zero alla radice, e si abbasserà, a destra della terza parte già abbassata, l'ultima parte 81, e separando l'ultima cifra 1 si dividerà il rimanente numero 14048 per 1560 doppio della radice trovata 780, il quoziente 9 sarà l'ultima cifra della radice esatta 7809; perchè facendo la verificazione resta zero. Per esercizio si possono ancora estrarre le radici seguenti:

$$\sqrt{17698849}=4207;$$
$$\sqrt{4243600}=2060;$$
$$\sqrt{30008484}=5478;$$
$$\sqrt{1111088889}=33333.$$

Siccome ciascuna parte binaria deve dare una sola cifra, non si potrà mai scrivere più di 9 alla radice; epperò non si devono ammettere quozienti maggiori di 9.

Quando il numero proposto non è un quadrato perfetto, la regola precedente farà conoscere *la radice del massimo quadrato contenuto nel numero*, o, ciò che torna allo stesso, la parte intera della radice, con un resto finale, che deve sempre essere minore del doppio della radice trovata, più 1: altramente vi sarebbe errore nelle cifre della radice. Per intendere questo fatto, basta paragonare il quadrato di un numero qualunque a, che è a^2, col quadrato di $(a+1)$, che è a^2+2a+1: risulta da questo confronto, che la differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi è eguale al doppio del numero minore, più 1.

Dal che si conchiude, che quando un resto è eguale al doppio della radice trovata, più 1, oppure maggiore di questa somma, la radice trovata è troppo piccola, e bisogna accrescerla di un'unità almeno.

Si noti ancora, che le radici quadrate dei numeri interi, che non sono quadrati perfetti, non si possono esprimere esattamente nè in numeri interi, nè in numeri frazionari; così prendendone una qualunque, la radice di 7, per esempio, essendo maggiore di 2, e minore di 3, si conchiude che sarà eguale a 2, più una parte più piccola di una unità: ma non si può assegnare una frazione, che aggiunta al 2, e facendone il quadrato, restituisca esattamente il 7.

Infatti un numero frazionario *irreduttibile* moltiplicato per se stesso, dà sempre un prodotto irreduttibile, che non potrà mai diventare un numero intero; essendo chiaro, che, in questa operazione, nissuno dei fattori primi del denominatore potrà entrare a far parte tra i fattori del numeratore. Dunque il quadrato di un numero frazionario irreduttibile sarà sempre un numero frazionario parimente irreduttibile, e non mai un numero intero.

Le radici dei numeri, che non sono quadrati perfetti, non potendosi valutare esattamente in numeri frazionari, ne segue che in qualunque numero di parti eguali si divida l'unità, e per quanto piccole si facciano queste parti, esse non potranno mai essere contenute un numero intero di volte nella radice proposta, la quale non si potrà misurare in parti dell'unità, e si dice perciò *incommensurabile* od *irrazionale*, cioè la cui ragione con l'unità non può esprimersi nè con numeri interi, nè con frazioni.

Quantunque non si possa ottenere esattamente la radice di un numero, che non sia un quadrato perfetto, si possono tuttavia trovar sempre due frazioni, l'una maggiore, l'altra minore della radice domandata, le quali abbiano il medesimo denominatore, e tanto grande quanto si vorrà, e non differiscano nei loro numeratori che di una unità; onde si ha modo di accostarsi al vero valore della radice quanto piaccia.

§ 18. Estrazione della radice quadrata per approssimazione.

Dalla definizione del quadrato, e dalla regola della moltiplicazione delle frazioni, risulta, che si formerà il quadrato di una frazione qualunque, facendo separatamente il quadrato del numeratore, e quello del denominatore. Così:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36} \text{ e } \left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{81}{49}$$

Dunque, inversamente, per avere la radice quadrata di una frazione qualunque, bisognerà estrarre la radice del numeratore, e quella del denominatore, e dividere la prima per la seconda.

Così $$\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6};\text{ e } \sqrt{\frac{81}{49}}=\frac{9}{7}$$

Se i due termini della frazione non sono quadrati perfetti, come nella frazione $\frac{7}{12}$, si converte allora la frazione in un'altra equivalente, il cui denominatore sia un quadrato perfetto; il che si ottiene facilmente, moltiplicando i due termini della frazione pel suo denominatore; così la frazione $\frac{7}{12}$ diventa $=\frac{84}{12.12}$; e prendendo la radice dei due termini, si avrà $\frac{9}{12}$ per la radice quadrata di $\frac{7}{12}$ con errore minore di $\frac{1}{12}$.

Si noti che la radice vera di $\frac{7}{12}$ è compresa tra $\frac{9}{12}$ e $\frac{10}{12}$; il

primo valore è troppo piccolo, il secondo è troppo grande, ma l'errore che si commette in meno o in più, prendendo l'uno o l'altro di questi pel valore della radice, è minore di $\frac{1}{12}$.

Nella stessa maniera, per estrarre, con una data approssimazione, la radice quadrata da un numero intero, che non sia un quadrato perfetto, si converte il numero dato in un numero frazionario avente per denominatore il quadrato del denominatore della frazione, che dinota il grado di approssimazione; quindi si estrae la radice dei due termini, prendendo la sola parte intera della radice del numeratore. Così volendo la radice di 2 con errore minore di $\frac{1}{5}$, si converte il 2 in $\frac{50}{25}$, e prendendo la radice dei due termini, si avrà $\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$ per la radice di 2 con errore minore di $\frac{1}{5}$; il vero valore di $\sqrt{2}$ è compreso tra $\frac{7}{5}$ e $\frac{8}{5}$. Così ancora $\sqrt{7}$ con errore minore di $\frac{1}{9}$ è eguale a $\sqrt{\frac{567}{81}}=\frac{23}{9}=2\frac{5}{9}$.

I valori prossimi delle radici si sogliono più frequentemente esprimere in frazioni decimali: ma il principio, di cui si fa uso per ciò, è sempre il medesimo.

Così per estrarre la radice quadrata da un numero intero con meno di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$, di $\frac{1}{1000}$ ecc. d' errore, bisognerà moltiplicare il numero proposto per $(10)^2$, $(100)^2$, $(1000)^2$ ecc., cioè mettere alla destra del numero, due, quattro, o sei zeri ecc.; quindi estrarre la parte intera della radice del prodotto, e dividere poscia questa radice per 10, per 100, o per 1000 ecc.

Oppure, ciò che torna allo stesso, scrivere alla destra del numero proposto tante coppie di zeri, quante sono le cifre decimali, che si vogliono avere alla radice; estrarre quindi la parte intera della radice del nuovo numero, e separare alla destra del risultato tante cifre decimali, quante sono le coppie di zeri aggiunte al numero.

Così per avere la radice di 5 con errore minore di un millesimo, si moltiplica 5 per $(1000)^2$, cioè per 1000000; e per questo basterà scrivere sei zeri alla destra del 5, il che darà 5000000; prendendo la parte intera della radice di questo numero, si troverà 2236, e dividendo per 1000, ossia separando colla virgola le tre ultime cifre a destra, si avrà 2,236 per la radice di 5 esatta sin nei millesimi, il che significa, che la radice di 5 è compresa tra 2,236 e 2,237.

Siccome dopo aver scritto i zeri alla destra del numero, per fare l'operazione bisogna, partendo dalla destra, scomporre il numero in membri binari, si può tralasciare di aggiugnere i zeri alla destra del numero, e scriverne solamente due per volta alla destra di ciascun resto, a misura che si vuole ottenere una nuova cifra decimale alla radice, come si vede nell'operazione seguente:

Si dirà: la radice di 5 è 2, che si scrive al suo posto colla virgola dopo, per separare la parte intera dalla parte decimale della radice; quindi mettendo due zeri alla destra del resto 1, e dividendo al solito, si ottengono 2 decimi, e quindi si otterranno medesimamente 3 centesimi, e 6 millesimi ecc.

5	2, 236
4	
10,0	42
84	2
160,0	443
1329	3
2710,0	4466
26796	6
304	

Si troverebbe medesimamente

$$\sqrt{2} = 1,414213 \text{ a meno di } 0,000001.$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508 \text{ a meno di } 0,0000001.$$

$$\sqrt{29} = 5,38 \text{ a meno di } 0,01.$$

$$\sqrt{227} = 15,0665 \text{ a meno di } 0,0001.$$

Il prodotto di due numeri decimali contenendo sempre a

destra della virgola tante cifre quante erano quelle de'due fattori, prese insieme, ne segue che il quadrato di un numero decimale ha dopo la virgola un numero di cifre doppio di quel che ne avesse la sua radice: ogni numero decimale, considerato come quadrato, dee dunque avere un numero pari di cifre decimali, e quando queste saranno in numero impari, prima di estrarre la radice, il numero di esse si renderà pari con l'aggiunta di uno zero.

Così per estrarre la radice quadrata dal numero 3,425 si aggiungerà uno zero, e levando una virgola si estrarrà la radice intera da 34250: si troverà 185, e separando le due ultime cifre si avrà 1,85 per la radice dimandata.

Volendo una maggiore approssimazione, oltre al zero aggiunto per rendere pari il numero delle cifre decimali, bisognerebbe ancora aggiugnerne tante coppie, quante cifre decimali si vogliono di più alla radice.

Così si troverà, che $\sqrt{12,5}$ con meno di 0,001 d'errore,

è uguale a $$\frac{\sqrt{12500000}}{1000}=3,535.$$

Regola generale: *Per estrarre la radice quadrata di un numero accompagnato da frazione decimale, si scriveranno alla destra di questa tanti zeri quanti è mestieri, affin di avere dopo la virgola un numero di cifre doppio di quello che si vuole alla radice: fatta quindi astrazione dalla virgola, si troverà la parte intera della radice, e se ne separerà verso destra il numero voluto di cifre decimali.*

Per valutare in decimali la radice quadrata di una frazione qualunque propria od impropria, si riduca questa in decimali, continuando l'operazione finchè si abbiano due volte tante cifre decimali quante se ne vogliono aver alla radice; quindi si opererà secondo la regola precedente.

Così si troverà che

$$\sqrt{\frac{310}{13}}=4,88 \text{ con meno di } 0,01 \text{ d'errore;}$$

$$\sqrt{3\frac{5}{7}}=1,927 \text{ con errore minore di } 0,001;$$

e $$\sqrt{\frac{7}{12}}=0,7637 \text{ con errore minore di } 0,0001.$$

§ 19. Estrazione della radice cubica dai numeri interi.

Da quanto si è detto al § 15 si fa manifesto, che estrarre la radice cubica di un numero significa trovare un altro numero che innalzato al cubo, o moltiplicato due volte per se stesso riproduca il numero dato.

Dalla tavola dei cubi (§ 14) si riconosce che fra tutti i numeri di una, due o di tre cifre non vi sono che nove cubi perfetti: ciascuno degli altri numeri compresi fra due cubi consecutivi della tavola, avrà per radice cubica un numero intero più una frazione, la quale però non potrà valutarsi esattamente, per la stessa ragione, per cui si è veduto non potersi valutare esattamente le radici quadrate dei numeri che non sono quadrati perfetti.

Le radici cubiche dei numeri interi, che non sono cubi esatti di altri numeri interi, non potendosi ottenere esattamente, sono dunque anch'esse numeri *incommensurabili*; ma è anche possibile approssimarsi al vero valore di queste radici in modo che l'errore commesso sia minore di una parte quanto si voglia piccola dell'unità.

Dalla tavola dei cubi de' dieci primi numeri interi si scorge

che i numeri di una, di due o di tre cifre danno una cifra sola per la parte intera della loro radice cubica.

Paragonando tra di loro i cubi di

10, di 100, di 1000 ecc.

che sono rispettivamente

1000, 1000000, 1000000000

si avrà quest'altra conseguenza: cioè che i numeri di quattro, di cinque o di sei cifre danno due cifre sole per la parte intera delle loro radici cubiche; ed i numeri di sette, otto o nove cifre, ne danno tre ecc.

Per intendere la regola dell'estrazione della radice cubica da un numero di quattro o più cifre, bisogna prima conoscere la composizione del cubo di un numero contenente decine ed unità. Si rappresentino per ciò con a le decine del numero, e con b le unità; sarà (§ 8),

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Da questa formola si vede che il cubo di un numero composto di decine e di unità contiene quattro parti; cioè *il cubo delle decine, più il triplo prodotto delle decine pel quadrato delle unità, più il quadrato delle unità.*

Se nella formola precedente s'intenderà per a un numero qualunque, e si farà $b=1$, risulterà

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

Sottraendo da questo cubo di $(a+1)$ il cubo di a, cioè a^3, il resto è manifestamente $3a^2+3a+1$; il che fa vedere che la differenza dei cubi di due numeri consecutivi, cioè che dif-

feriscono solamente di una unità, è sempre uguale al triplo quadrato del numero minore, più ancora il triplo dello stesso numero, più 1 : e che conseguentemente questa differenza dei cubi cresce di più in più, a misura che i due numeri consecutivi sono più grandi.

Si debba ora estrarre la radice cubica del numero 21952. Questo numero essendo compreso tra 1000, che è il cubo di 10, e 1000000, che è il cubo di 100, la sua radice cubica è necessariamente composta di due cifre, cioè conterrà decine ed unità.

Dunque il numero proposto 21952 deve contenere *il cubo delle decine della radice, più il triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità, più il triplo prodotto delle decine pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità.*

Ciò posto; il cubo delle decine non potendo contenere cifre significative di un ordine inferiore al migliaio, le tre ultime cifre a destra del numero non possono far parte di questo cubo, e perciò si separano con una virgola, e si cerca il cubo delle decine nella parte 21 restante a sinistra: ora il più grande cubo contenuto nel 21 è 8, la cui radice cubica 2 sarà la cifra delle decine della radice; sottraendo 8 cubo di 2 da 21, resterà 13; abbassando a destra del resto 13 la parte ternaria seguente, si avrà 13952, che conterrà ancora il triplo quadrato delle decine, moltiplicato per le unità, più le altre due parti del cubo accennate di sopra. Ma il quadrato delle decine non potendo contenere unità di un ordine inferiore al centinaio, le due ultime cifre 52 non possono far parte del triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità, perciò si separano con una virgola o punto, e la parte restante 139 conterrà le cifre significative del triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità, più le centinaia che ponno provenire dalle due rimanenti parti del cubo proposto: dividendo adunque il 139 pel triplo quadrato delle decine della radice, cioè per 12, il quoziente sarà eguale o superiore alle unità della radice: nell'esempio presente questo

21,952	28
8	
139·52	12
21952	
0	

quoziente è 11, epperò certamente troppo grande, come pure il 10, poichè le unità cercate non ponno essere più di nove: basterà dunque verificare se la cifra 9 non è troppo grande; per questa verificazione si potrebbe, col mezzo della cifra **2** delle decine, e della cifra 9 delle unità, formare le tre parti che entrano nel 13952; ma sarà generalmente più facile di fare il cubo di 29: ora questo cubo risultando più grande del numero proposto 21952, mostra che la cifra 9 è ancora troppo grande; ma facendo il cubo di 28, si trova giustamente 21952; dunque il numero proposto è un cubo perfetto, ed ha per radice cubica 28.

Se il numero proposto avesse più di sei cifre, la sua radice cubica ne avrebbe più di due; ma il ragionamento che si farà per trovare successivamente tutte le cifre della radice, sarà ancora lo stesso.

Si debba per esempio estrarre la radice cubica del numero 105823817.

Questa radice dovendo contenere decine ed unità, si separeranno le tre ultime cifre 817, che non possono far parte del cubo delle decine, e si cercherà la radice cubica della parte restante a sinistra 105823; ma questo numero avendo più di tre cifre, la sua radice cubica avrà più di una cifra, e conterrà ancora decine ed unità; dunque bisognerà ancora separare le tre ultime cifre 823, e cercare la radice cubica della parte restante a sinistra 105, ecc.

Da questo ragionamento risulta la seguente regola per estrarre la radice cubica da un intero qualunque.

1° *Partendo dalla destra bisogna prima scomporre il numero proposto in membri ternari, eccettuato l'ultimo membro a sinistra che può avere tre cifre, o due, od anche una sola: il numero di questi membri è sempre eguale al numero delle cifre della radice.*

2° *Estrarre la radice del più grande cubo contenuto nel primo membro a sinistra, e sottrarre questo cubo dal primo membro.*

3° *Abbassare a lato del resto la prima cifra sola del secondo membro ternario, e dividere il numero così formato pel triplo quadrato della cifra già trovata alla radice; scrivere a parte questo quoziente a destra della cifra già trovata e fare il cubo delle due cifre unite; se questo cubo è più grande delle due prime parti del numero proposto unite insieme, si diminuisce il quoziente di un'unità, e si riprova finchè si ottenga un cubo, che possa sottrarsi dalle due prime parti.*

4° *Fatta la sottrazione bisogna abbassare a lato del nuovo resto la prima cifra del terzo ternario, e dividere il numero risultante pel triplo quadrato delle due cifre già trovate alla radice, e continuare l'operazione nello stesso modo sino al fine.*

Applicando questa regola al numero proposto diviso in membri ternari, si dirà: il maggior cubo contenuto in 105 (§ 14) è 64, la cui radice cubica è 4, che si scriverà per prima cifra della radice cercata: sottraendo 64 da 105, ed abbassando a lato del resto 41 la prima cifra 8 del secondo ternario, si dividerà 418 per 48 triplo quadrato della prima cifra 4 già trovata alla radice; il quoziente di questa divisione è 8, che non si scrive però alla radice, perchè il cubo di 48 essendo 110592 non può sottrarsi dalle due prime parti del numero proposto, che fanno solamente 105823; si prova dunque la cifra 7 facendo il cubo di 47; questo cubo essendo 103823 può essere sottratto dalle due prime parti, e darà per resto 2000; si scriverà dunque 7 per seconda cifra della radice; abbassando la prima cifra 8 del terzo ternario a destra del residuo 2000, e dividendo il numero risultante 20008 per 6627, che è il triplo quadrato della radice già trovata 47, il quoziente 3 sarà la terza cifra della radice; perchè facendo il cubo di 473 si ritrova giustamente il numero proposto.

105,823,817	473
64	
418	48
103823	6627
20008	
105823817	
0.	

Se qualche dividendo, formato da un resto e dalla prima cifra della parte seguente, non contenesse il triplo quadrato

della radice già trovata, allora si metterebbe zero alla radice, e si abbasserebbero le due altre cifre dalla parte già considerata, colla prima cifra della parte seguente; e si dividerebbe tutto questo numero pel triplo quadrato della radice compreso lo zero aggiunto.

Se s'incontrasse qualche resto eguale, o maggiore del triplo quadrato della radice trovata, più tre volte la stessa radice, più l'unità, allora l'ultima delle cifre della radice è troppo piccola (§ 18), e converrebbe accrescerla di un'unità almeno.

§ 20. Estrazione della radice cubica per approssimazione.

Quando il numero proposto non è un cubo perfetto, il modo precedente farà conoscere la parte intera della radice.

Ma si è già notato che non si può trovare frazione, la quale esprima esattamente il valore delle parti che converrebbe aggiungere alla radice per compierla. Tuttavia si potrà sempre trovare un valore approssimativo tale, che la differenza tra questo ed il vero valore della radice sia minore di una parte qualunque dell'unità.

Così, per esempio, volendo la radice cubica di 15 con un errore minore di $\frac{1}{12}$, si trasformerà il 15 in un numero frazionario avente per denominatore il cubo di 12: si avrà dunque

$$15=\frac{15\cdot 12^3}{12^3}=\frac{25920}{12^3}$$

e prendendo la radice cubica dei due termini, limitandosi alla parte intera per quella del numeratore, si avrà $\sqrt[3]{15}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$.

Collo stesso metodo si troverà facilmente che $\sqrt[3]{47}$ con meno di $\frac{1}{20}$ d'errore, è eguale a $\frac{72}{20}=3\frac{12}{20}=3\frac{3}{5}$

L'approssimazione in decimali è una conseguenza della regola precedente.

Così per valutare la radice cubica di 77 con un errore minore di 0,001, basterà moltiplicare 77 pel cubo di 1000, e questa operazione si farà facilmente aggiungendo nove zeri alla destra di 77, il che darà 77000000000; estrarre quindi la radice cubica intera da questo numero, la quale sarà 4254, e dividere poscia questa radice per 1000: si avrà così $\sqrt[3]{77}=4,254$ a meno di 0,001 d'errore.

Regola generale: *Per valutare in decimali la radice cubica di numero intero qualunque, si scrivano alla destra del numero tanti ternari di zero, quante cifre decimali si vogliono alla radice; si estragga quindi la radice cubica intera del nuovo numero, e si separi a destra della radice il richiesto numero di decimali.*

Questa pratica è fondata sul principio che il cubo di un numero decimale deve avere tre volte tante cifre decimali, quante sono quelle della radice.

Dunque se il numero proposto contenesse già alcune cifre decimali, basterebbe allora aggiugnere un numero conveniente di zeri, affinchè il numero totale delle cifre decimali divenga triplo di quello delle stesse cifre volute alla radice; sopprimere quindi la virgola, ed estrarre dal numero risultante la radice cubica intera, e separare infine alla destra di questa radice il richiesto numero di cifre decimali.

Così si avrà la radice cubica di 3,23 con tre cifre decimali, aggiungendo al numero sette zeri, ed estraendo la radice cubica intera da 3230000000; questa radice essendo 1477, separando le tre ultime cifre, si avrà 1,477 per la radice dimandata.

Per ottenere la radice cubica approssimata di una frazione qualunque, si può trasformare l'espressione frazionaria in un'altra equivalente, che abbia per denominatore un cubo perfetto, ed estrarre quiudi la radice cubica dai due termini, prendendo per quella del numeratore solamente la parte intera. Ma sarà

più facile ridurre subito il numero frazionario in decimali, continuando questa riduzione, finchè si abbiano tre volte tante cifre decimali, quante se ne vogliono alla radice, e operare quindi come nel caso precedente. Si troverà così

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=0,8939$$

con meno di 0,0001 d'errore; e

$$\sqrt[3]{17\frac{2}{3}}=2,604463$$

esatta sino ai milionesimi.

Quando si sa estrarre la radice quadrata e la radice cubica, si può anche estrarre la radice quarta e la radice sesta; e generalmente qualunque radice, il cui esponente è una potenza di 2 o di 3, o il prodotto di una potenza di 2 per una potenza di 3.

Si ottiene la radice quarta con due estrazioni successive della radice quadrata; la radice sesta con due estrazioni successive, l'una di radice quadrata e l'altra di radice cubica, o inversamente la prima di radice cubica, e la seconda di radice quadrata, ecc.

È manifesto che il quadrato o il cubo di un prodotto si compone dal prodotto dei quadrati o dei cubi di ciascheduno dei suoi fattori; poichè

$$abc\times abc=a^2b^2c^2 \quad \text{ed} \quad (abc)^3=a^3b^3c^3.$$

Dunque la radice quadrata o cubica di un prodotto è eguale al prodotto delle radici quadrate o cubiche de' fattori.

Così $\sqrt{a^2b^2c^2}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^2}\times\sqrt{c^2}=abc;$

$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b};$

similmente

$$\sqrt[3]{a^3b^3}=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^3}=ab;$$

$$\sqrt[3]{a^3b}=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b}=a\sqrt[3]{b}.$$

Quest'osservazione serve a semplificare i radicali irrazionali, facendo cioè sortire dal segno radicale quadrato o cubico i fattori, che sono quadrati o cubi perfetti, estraendone le rispettive radici, e lasciando sotto il radicale i soli fattori che non sono quadrati o cubi perfetti.

Così si troverà:

$$\sqrt{8}=2\sqrt{2};\quad \sqrt{27}=3\sqrt{3};\quad \sqrt{75}=5\sqrt{3};$$

e $$\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{2};\quad \sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3}.$$

Segue ancora dal principio citato, che

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab};\quad \text{e}\quad \sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab};$$

dunque per moltiplicare un radicale per un altro dello stesso indice, basterà moltiplicare le quantità sotto i segni radicali, e dare al prodotto lo stesso segno radicale.

Così $\sqrt{7}\times\sqrt{5}=\sqrt{35};\quad \sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{36}=6.$

Inversamente per dividere un radicale per un altro dello stesso indice, si divideranno le quantità sotto i segni, e si darà al quoziente lo stesso segno radicale.

Così $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\sqrt{a}$,

oppure $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{ab}{b}}=\sqrt{a}$; $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}=\sqrt{5}$;

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{4}=2;\quad \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{33}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Il quadrato di $\sqrt{a}$ per la definizione stessa della radice quadrata è manifestamente eguale ad a.

Ciò posto, il cubo di $\sqrt{a}$ sarà $a\sqrt{a}$; perchè si ottiene il cubo di un numero moltiplicando il numero pel suo quadrato; $b\sqrt{b}$ è parimente il cubo di $\sqrt{b}$. E le espressioni $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{5}$, ecc., sono i cubi delle corrispondenti espressioni $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ecc.

CAPO IV.

Delle equazioni.

ARTICOLO I.

Delle equazioni di primo grado ad una sola incognita.

Quantità cognite ed incognite; uguaglianza; equazione algebrica. — Distinzioni delle equazioni in gradi. — Principii da cui dipende la soluzione delle equazioni di primo grado, e soluzione delle medesime. — Problemi. — Osservazioni sui valori numerici dell'incognita che soddisfano all'equazione, ma non al problema.

---

§ 21. Quantità cognite ed incognite; uguaglianza; equazione algebrica.

Nelle quistioni algebriche si distinguono due sorta di quantità, cioè cognite ed incognite: le prime soglionsi esprimere o con numeri o colle prime lettere dell'alfabeto a, b, c, ecc.; le seconde colle ultime lettere x, y, z, ecc. Due quantità espresse in numeri sono eguali, quando, finito tutto il calcolo, si riducono ad uno stesso numero; come $5-7+10=2\times4$: ma questa eguaglianza si dirà piuttosto un'identità, che una vera equazione algebrica: perchè nelle equazioni algebriche si eguagliano generalmente diverse espressioni delle quantità incognite tra di loro, oppure a quantità cognite.

Così, per esempio, se si domanda quale sia il numero che, moltiplicato per 3, dà un prodotto eguale allo stesso numero accresciuto di 8; chiamando x il numero cercato, e traducendo il

linguaggio algebrico l'enunciazione del quesito, si deve avere $3x = x + 8$.

Quest'espressione non è un'eguaglianza effettivamente esistente, ma un'eguaglianza in certo modo ipotetica o condizionale, che non si verificherà, se non sostituendo in vece di x il numero rappresentato da quest'incognita; essa è una vera equazione algebrica. Dunque un'equazione, propriamente parlando, è un'eguaglianza da effettuarsi, o un'eguaglianza a cui si deve soddisfare mediante una giusta determinazione dell' incognita che essa contiene.

La parte dell'equazione, che trovasi scritta a sinistra del segno $=$, si chiama il primo membro dell'equazione; quella che è scritta a destra, il secondo membro.

§ 22. Distinzione delle equazioni in gradi.

Le equazioni si distinguono in gradi secondo le diverse potenze delle incognite, e diconsi di primo grado quando le incognite vi sono contenute alla prima potenza solamente, e non vi si trovano moltiplicate le une per le altre; tali sono le equazioni $9x - 4 = 3x + 8$, e $ax - b = cx$.

Un'equazione si dirà di secondo grado, quando l'incognita vi è innalzata alla seconda potenza, come $x^2 + 4x = 9$, e $x^2 + bx = c$. L'equazione sarebbe il terzo grado, se in alcuno de' suoi termini entrasse il cubo dell'incognita, come $x^3 + 4x = 12$, oppure $x^3 + px = q$ ecc.

Nel presente Trattato si tratterà brevissimamente delle equazioni di primo grado ad una od a più incognite, e delle equazioni di secondo grado ad una sola incognita.

§ 23. Principii da cui dipende la soluzione delle equazioni di 1° grado, e soluzione delle medesime.

La soluzione di qualsivoglia quesito o problema contiene due parti: la prima ha per oggetto di esprimere, per mezzo di equazioni, le relazioni che debbono esistere tra le quantità cognite e le incognite, ossia di mettere, come suolsi dire, il problema in equazioni: nella seconda si cerca di dedurre dalle equazioni così formate i valori delle incognite, che adempiono le condizioni proposte; cioè di risolvere queste equazioni. Gli esempi particolari che si tratteranno fra poco, gioveranno meglio di qualsivoglia ragionamento a mostrare quale strada debba tenersi in ciaschedun caso per formare le equazioni del problema.

La risoluzione delle equazioni di primo grado dipende dai due principii seguenti che sono evidenti per se stessi, cioè:

1° *Se a due quantità eguali si aggiunge la stessa quantità: o se da due quantità eguali si toglie la stessa quantità, si hanno ancora due quantità eguali.*

2° *Se due quantità eguali si moltiplicano (o si dividono) per lo stesso numero, i due prodotti (od i due quozienti) sono ancora eguali.* 3°

3° se l'una e l'altra si cangiano di segno insieme

Nelle equazioni di primo grado l'incognita non può essere unita a quantità cognite, che per addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Si daranno le regole necessarie per ridurre, in tutti questi casi, l'incognita sola nel primo membro dell'equazione, e tutti i termini cogniti nel secondo: il che è ciò che si chiama risolvere un'equazione.

Si debba, per esempio, risolvere l'equazione

$$\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}-20-\frac{x}{6}=\frac{3x}{4}-\frac{x}{12}-8.$$

1° *Si faranno sparire tutti i denominatori moltiplicando*

l'equazione pel numero, che sarà il denominatore comune: il che non altera l'equazione.

Moltiplicando dunque tutti i termini per 12, l'equazione proposta diventerà:

$$8x+6x-240-2x=9x-x-96.$$

Riducendo i termini simili, risulterà:

$$12x-240=8x-96.$$

2° *Si riuniranno tutti i termini incogniti nel primo membro, e le quantità cognite nel secondo, cangiando i segni ai termini che si trasportano da un membro all'altro.*

Il che torna allo stesso, che aggiugnere ai due membri **240**, e levare da ambedue $8x$: in questo modo l'equazione diventerà $12x-8x=240-96$; oppure $4x=144$; e dividendo da ambe le parti per 4, risulterà $x=36$; il numero 36 risolve dunque l'equazione proposta; cioè i due membri diventano eguali, se si sostituisce 36 invece di x.

L'ultima operazione che ha dato per quoziente 36 fa vedere, *che per lib[illegible]'incognita dal suo coefficiente, bisogna dividere tutta l'equa[illegible]l coefficiente stesso dell'incognita.*

Secondo esempio.

$$\frac{6x}{5}-90+\frac{2x}{3}=\frac{4x}{3}-82$$

trasportando, si troverà

$$\frac{6x}{5}+\frac{2x}{3}-\frac{4x}{3}=90-82,$$

$\frac{6x}{5}-\frac{2x}{3}=90-82$

che si riduce a $\frac{6x}{5}-\frac{2x}{3}=8$, moltiplicando per 15 si ottiene $18x-10x=8.15$: oppure $8x=8.15$; e quindi $x=15$.

Terzo esempio.

$\frac{2x}{7}+9=\frac{x}{3}-10$ darà $9+10=\frac{x}{3}-\frac{2x}{7}$; e moltiplicando per 21, si trova $19.21=7x-6x$; onde risulta $x=19.21=399$.

§ 24. Problemi.

I. Un padre ha otto volte l'età di suo figlio, e la somma delle due età è di 45 anni; quale sarà l'età del figlio, e del padre. Chiamando x l'età del figlio, quella del padre sarà $8x$: dunque si deve avere $x+8x=45$; ossia $9x=45$; donde risulta $x=5$: il figlio ha dunque 5 anni, ed il padre ne ha 40.

II. Trovare due numeri, la cui somma sia 57, e la differenza 7: chiamando x il numero minore, il maggiore sarà $x+7$; e prendendo la somma dei due numeri, si avrà $x+x+7=57$, ossia $2x=50$, e quindi $x=25$; il numero minore è dunque 25, ed il maggiore sarà $25+7=32$.

Se la somma dei due numeri cercati fosse 60, e la differenza 37, si troverebbe medesimamente $11\frac{1}{2}$ pel numero minore, e $48\frac{1}{2}$ pel maggiore. Ma bisognerebbe in ciaschedun caso particolare ricominciare il calcolo, cioè formare l'equazione e risolverla. Per comprendere tutti questi problemi particolari in un solo generale, si risolverà il problema seguente: *trovare due numeri, la cui somma sia a, e la differenza b.*

Sia x il numero più piccolo; il più grande sarà $x+b$; e l'equazione del problema sarà $x+x+b=a$; che si cangia in

$2x=a-b$; dalla quale si ricava $x=\frac{a-b}{2}$. Dunque, il numero minore sarà eguale ad $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ ed il maggiore sarà

$$=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}-+b=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}.$$

Dunque, generalmente, quando è data la somma e la differenza di due numeri, il numero maggiore è uguale alla metà della somma, più la metà della differenza, ed il numero minore è eguale alla metà della somma, meno la metà della differenza data.

III. Qual è il numero, di cui il terzo, più il quarto uniti insieme, fanno 63. Sia x il numero cercato; si avrà l' equazione $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=63$; che si riduce a $7x=63.12$: donde si ricava $x=9.12=108$.
Più generalmente qual è il numero, che diviso per a e per b, dà s per la somma dei due quozienti: si troverà $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=s$; donde risulterà $x=\frac{abs}{a+b}$. Quando saranno dati in numeri i valori di a, b, ed s, si troverà senza difficoltà quello del numero domandato, eseguendo sopra di essi i calcoli indicati dalla formola cui si è pervenuti: così se fossero $a=6$, $b=8$, $s=182$, si troverebbe $x=624$.

IV. Si ha una verga o massa d'argento al titolo di 0,7 (*); si vuole ridurla al titolo di 0,9, mediante l'aggiunta di una nuova

(*) L'oro e l'argento, essendo quasi sempre uniti con altri metalli, per distinguerne il grado di finezza si suol dire che sono al tal titolo: e s'intende con ciò la parte di fino, cioè la parte d'oro puro o d'argento puro che essi contengono; onde si dice, per es., argento al titolo di 0, 7, oppure a 0, 7 di fino, per significare che i 7/10 del suo peso sono d'argento puro, ed i restanti 3/10 sono di rame o di lega.

quantità d'argento puro; la massa pesa 25 libbre: quante libbre d'argento puro si dovranno aggiugnere, affinchè la nuova massa risulti al titolo di 0,9. Sia x il numero delle libbre da aggiugnersi; la nuova massa sarà di $25+x$ libbre; ma questa massa non contiene di lega, che i $\frac{3}{10}$ della prima massa, o di 25 libbre, che fanno libbre 7,5; e questa lega secondo il nuovo titolo deve essere la decima parte della nuova massa. L' equazione del problema sarà dunque $7,5=\frac{25+x}{10}$; dalla quale si ricava $x=75-25=50$ libbre. Così fondendo colla prima massa 50 libbre d'argento puro, si avranno 75 libbre d'argento al titolo di 0,9.

V. Trovare tutti gl'istanti, in cui l'ago dei minuti di un orologio si trova sopra quello delle ore.

È manifesto che uno di quest' incontri succede a mezzogiorno, e che dopo quest'istante le lancette non ponno incontrarsi prima che quella de'minuti abbia compito un giro intero. Per trovare gli altri si osserva, che l'ago dei minuti percorre nello stesso tempo uno spazio 12 volte più grande di quello percorso dall'ago delle ore. Dunque chiamando a la circonferenza intiera dell'orologio, e x lo spazio percorso dall'ago delle ore dal mezzogiorno sino al punto del primo incontro dei due aghi, $12x$ sarà lo spazio percorso dall' ago de' minuti nello stesso tempo; e questo spazio $12x$ contiene l'intiera circonferenza a, più il cammino x percorso dall' ago delle ore. L' equazione sarà dunque $12x=a+x$; da cui si deduce $11x=a$; e quindi $x=\frac{a}{11}$; ma la circonferenza a è divisa in 12 ore; dunque sostituendo 12 ore invece di a, si avrà $x=\frac{12}{11}=1^{\text{ora}}\frac{1}{11}$; passa dunque un' ora ed un undicesimo fra due incontri consecutivi dei due aghi; e perciò quest'incontri succederanno a mezzogiorno, a $1^{\text{ora}}\frac{1}{11}$; a $2^{\text{ore}}\frac{2}{11}$; a $3^{\text{ore}}\frac{3}{11}$ ecc.

§ 25. Osservazioni sui valori numerici dell'incognita che soddisfano all'equazione, ma non al problema.

Si deve osservare, che risolvendo un' equazione, s' incontra qualche volta un valore numerico dell' incognita, che soddisfa benissimo all' equazione, ma non può soddisfare al problema; in questo caso le condizioni del problema sono state male scelte, e conviene modificare in qualche maniera l' enunciato, onde il problema divenga possibile; per esempio, se si dicesse, nelle due classi di filosofia vi sono 190 allievi, ed in quella del primo anno ve ne sono 19 di più che in quella del secondo anno, e si dimandasse quanti sono gli allievi di ciascheduna classe: risolvendo con questi dati, l'equazione che conviene alla quistione presente (§ 24) si troverebbe $104\frac{1}{2}$ pel numero degli allievi del 1° anno, $85\frac{1}{2}$ per quelli del 2° anno. Questi due numeri verificano bensì le condizioni numeriche dell' equazione, poichè la loro somma è 190, e la loro differenza 19; ma è chiaro che non possono soddisfare al problema, che richiede necessariamente numeri interi; e mostrano che è impossibile che si abbia contemporaneamente 190 per la somma e 19 per la differenza degli allievi delle due classi.

ARTICOLO II.

Delle equazioni di 1° grado a più incognite.

Condizioni che si richiedono per poter determinare i valori delle incognite.—Risoluzione delle equazioni a più incognite; tre metodi di eliminazione — Simbolo dell'indeterminato; avvertenza sulla esistenza di un fattor comune; simbolo dell'infinito. — Problemi.

§ 26. Condizioni che si richiedono per poter determinare i valori delle incognite.

Per poter determinare i valori di più incognite è necessario:

1° Che le condizioni del problema somministrino tante equazioni, quante sono le incognite. Perchè da una sola equazione tra due incognite, come sarebbe per esempio, $x+y=12$, non si può dedurre il valore di x senza conoscere quella di y; e siccome non vi è condizione, che possa determinare y, si può attribuirgli arbitrariamente tutti i valori possibili, e ricavare i corrispondenti valori di x. Vi sarebbe dunque un numero infinito di soluzioni, ed il problema si dice indeterminato.

Due equazioni con tre incognite appartengono parimente ad un problema indeterminato, ecc.

2° Tutte le equazioni appartenenti ad uno stesso problema debbono esprimere condizioni distinte. Dunque se due equazioni con due incognite esprimono una medesima condizione, come, per esempio, $x+y=5$, e $3x+3y=15$, queste equazioni equivalgono ad una sola equazione, ed appartengono perciò ad un problema indeterminato.

3° Le condizioni diverse, espresse dalle equazioni di uno stesso problema, non debbono essere contraddittorie; e quando lo

sono, come $x+y=8$, e $3x+3y=4$, mostrano con ciò che il problema è impossibile.

I risultati del calcolo faranno vedere tutti questi casi particolari.

§ 27. Risoluzione delle equazioni a più incognite; tre metodi di eliminazione.

Abbiansi da risolvere le due equazioni $5x-3y=1$, e $3y-2x=5$; cioè trovare due numeri, che posti l'uno in luogo di x, l'altro di y, rendano il primo membro di ciascuna equazione identico col secondo.

Per ciò ottenere bisogna ricavare dalle due equazioni proposte una terza equazione con una sola incognita; il che si chiama eliminare una delle due incognite; risolvere quest' ultima riguardo all' incognita, che contiene, e sostituire il valore di quest'incognita in una delle due proposte, la quale risoluta farà conoscere il valore dell'altra incognita.

Vi sono diversi metodi di eliminazione; il primo che si presenta, consiste nel prendere dalle due equazioni il valore di una stessa incognita, considerando l'altra come cognita, e nell'eguagliare questi due valori; così, ricavando dalle due proposte il valore di x, si avrà dalla prima $x=\frac{3y+1}{5}$; e dalla seconda $x=\frac{3y-5}{2}$; eguagliando tra loro questi due valori si ottiene $\frac{3y-5}{2}=\frac{3y+1}{5}$, equazione a una sola incognita, che si riduce a $15y-25=6y+2$, ossia $9y=27$; e quindi $y=3$; sostituendo questo valore di y in una delle due proposte, oppure in uno dei due valori di x trovati qui sopra, risulterà $x=2$; così $x=2$, e $y=3$ sono i soli valori, che risolvono le due equazioni proposte.

2° Vi è un altro metodo di eliminazione, che si chiama metodo delle sostituzioni; esso consiste nel prendere, come qui

sopra, il valore di un'incognita in una qualunque delle equazioni, e sostituirlo nelle altre, il che darà un'equazione e un'incognita di meno; e ripetere la stessa operazione, sinchè si arrivi ad una equazione con una sola incognita. Sieno, per esempio, le tre equazioni seguenti:

$$3x+2y=12;$$
$$2z+y=5;$$
$$x+y+3z=8.$$

La seconda dà $y=5-2z$; sostituendo questo valore di y nelle due altre, esse diventano $3x-4z=2$; e $x+z=3$: ma quest'ultima dà $x=3-z$; il qual valore sostituito nella penultima, la cangia in $9-7z=2$; dalla quale si ricava $z=1$, e quindi per conseguenza $x=2$, e $y=3$.

3° Una terza maniera di eliminazione consiste nel rendere i coefficienti dell'incognita, che si vuole eliminare, eguali in tutte le equazioni; e sottrarre quindi un'equazione dall'altra se i coefficienti eguali hanno lo stesso segno; oppure sommarle insieme se hanno segni diversi. Così nelle due equazioni:

$$3x+5y=36$$
$$3x-4y=9$$

per eliminare x basta sottrarre la seconda dalla prima, e si avrà $5y+4y=36-9$; ossia $9y=27$; donde $y=3$; volendo eliminare y, per ottenere prima il valore di x, bisogna rendere i due coefficienti di y eguali nelle due equazioni; il che si ottiene facilmente moltiplicando i due membri della prima equazione per 4 coefficiente di y nella seconda, ed i due membri della seconda per 5 coefficiente di y nella prima; si otterrà così

$$12x+20y=144,$$
$$15x-20y=45,$$

e sommando insieme le due equazioni, giacchè i coefficienti eguali di y hanno il segno contrario, si avrà $12x+15x=144+45$; ossia $27x=189$; e quindi $x=7$.

Questi tre modi di eliminazione possono egualmente applicarsi, qualunque sia il numero delle equazioni e delle incognite.

§ 28. Simbolo dell'indeterminato; avvertenza sull'esistenza di un fattor comune; simbolo dell'infinito.

Risolvendo le due equazioni del § 26, cioè

$$x+y=5,$$
$$\text{e } 3x+3y=15:$$

eliminando y, si trova $3x+15-3x=15$; ed eliminando x, si ha $15-3y+3y=15$; queste due equazioni danno $15=15$ senza alcuna determinazione delle due incognite; il che denota che il problema è indeterminato; ma conservando nell'espressione finale di x e di y i termini che si annullano, si otterrà $(3-3)\ x=15-15$; ossia $x=\frac{15-15}{3-3}=\frac{0}{0}$; si troverà la stessa espressione per y: onde si vede che il simbolo $\frac{0}{0}$ denota una *quantità indeterminata*: tuttavia questo medesimo simbolo può talvolta esprimere in realtà una quantità di valore determinato. Così p. es. l'espressione $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ diventa $\frac{0}{0}$ facendo $x=a$; ma osservando che $\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x+a)\ (x-a)}{x-a}=x+a$; si vedrà che togliendo il fattore $x-a$ comune ai due termini, la stessa espressione che era prima $=\frac{0}{0}$, diventa $=2a$, quando $x=a$.

2° Eliminando y tra le due equazioni (§ 26) $x+y=8$;

e $3x+3y=4$, si troverà $3x+24-3x=12$; ossia $24=12$; questa contraddizione indica un'impossibilità nel problema. Ma conservando i termini che si annullano, si avrà $(3-3)\ x=12-24$, ossia $x=\frac{12-24}{3-3}=\frac{-12}{0}$; si troverebbe uno stesso valore per y. Facendo ora astrazione dal seguo —, e considerando solamente il $\frac{12}{0}$, si scorge subito non potersi assegnare un numero, che rappresenti questo quoziente; poichè le espressioni

$$\frac{a}{0,1}=10a, \frac{a}{0,01}=100a, \frac{a}{0,001}=1000a$$

mostrano chiaro, che il valore di una frazione può diventar maggiore di qualsivoglia numero dato, purchè il denominatore di essi si faccia piccolo quanto basta: dunque, se il denominatore si fa zero, il quoziente diverrà infinitamente grande, e perciò si dice che lo zero si contiene infinite volte in un numero qualunque. Così le espressioni $\frac{a}{0}$, $\frac{12}{0}$, $\frac{-12}{0}$ ecc. si considerano come simboli dell'infinito, e si notano nella maniera seguente

$$\frac{a}{0}=\infty, \frac{12}{12}=\infty, \frac{-12}{0}=-\infty$$

ossia l'infinito negativo.

§ 29. Problemi.

I. Formare una somma di 219 lire con 60 pezze, le une da 5 lire, e le altre da 2 lire. Chiamando x il numero delle pezze da 5, ed y quello delle pezze da 2, le equazioni del pro-

blema saranno $x+y=60$, e $5x+2y=219$; le quali risolute secondo le regole precedenti danno $x=33$, e $y=27$.

II. Una persona tiene chiuse in ciascuna mano un certo numero di monete: se essa ne fa passare una dalla destra nella sinistra, ne ha un numero eguale in ciascuna mano; ma se essa ne passa due dalla sinistra nella destra, questa ne contiene il doppio dell'altra: quante monete ha in ciascuna mano? Ponendo che ne abbia x nella destra, ed y nella sinistra, la prima condizione dà $x-1=y+1$, e la seconda darà $x+2=2(y-2)$: queste due equazioni risolute danno $x=10$, e $y=8$.

III. Si hanno due verghe, o masse d'oro, la prima contiene 0,95 di fino, e la seconda 0,86; quanti chilogrammi bisognerà prendere da ciascuna massa per formarne una terza di 27 kilogrammi al titolo di 0,9?

Chiamando x ed y i due numeri di chilogrammi da prendersi sulla prima e seconda massa si avrà per prima equazione $x+y=27$; per formare la seconda equazione si osserva che le parti di fino contenute in x ed in y rispettivamente sono $0{,}95\times x$ e $0{,}86\times y$, e che queste parti sommate insieme debbono dare la parte di fino della massa dimandata, cioè $0{,}90\times 27$; la seconda equazione sarà dunque $95x+86y=90\times 27$. Risolvendo le due equazioni si troverà $x=12$, e $y=15$; cioè prendendo 12 kilogrammi dalla prima massa, e 15 kilogrammi dalla seconda, si formeranno 27 kilogrammi al titolo di 0,9.

IV. Si comprarono tre cavalli; si sa che il doppio prezzo del primo, più quello del secondo e del terzo fanno 50 doppie; il prezzo del primo e del terzo, più tre volte quello del secondo fanno 78 doppie; ed il prezzo del primo e del secondo, più due volte quello del terzo fanno 58 doppie: si domanda il prezzo di ciascun cavallo.

Chiamando x, y, z i corrispondenti prezzi del primo, del

secondo e del terzo cavallo, le equazioni saranno manifestamente:

$$2x+y+z=50.$$

$$x+3y+z=78.$$

$$x+y+2z=58.$$

Sottraendo la terza dalla seconda, si ha . . .	$2y-z=20$;
Moltiplicando la seconda per 2, e sottraendo dal prodotto la prima, si ha	$5y+z=106$
Sommando insieme queste due ultime, si ha .	$7y=126$
Donde si ricava	$y=18$
E quindi risalendo si troverà	$z=16$
E	$x=8$.

V. In un magazzino vi sono tre miscugli che contengono ciascuno tre specie di biade; sopra 100 emine del primo ve ne sono 80 di frumento, 12 di segala, e 8 d'orzo; 100 emine del secondo ne contengono 75 di frumento, 15 di segala, e 10 di orzo; e 100 del terzo contengono 60 di frumento, 20 di segala, e 20 d'orzo. Quante emine bisognerà prendere da ciascun miscuglio per formarne 100, che contengano 73 di frumento, 15 di segala, e 12 d'orzo?

Chiamando x, y, z i corrispondenti numeri d'emine da prendersi sul 1°, 2° e 3° miscuglio, si formeranno facilmente le tre equazioni seguenti:

$$80x+75y+60z=7300.$$

$$12x+15y+20z=1500.$$

$$8x+10y+20z=1200.$$

Moltiplicando la seconda per 3, e sottraendo il prodotto dalla

prima, e la terza dalla seconda, si ottengono le due seguenti equazioni:

$$44x+30y=2800,$$
$$\text{e } 4x+5y=300;$$

moltiplicando la quinta per 6, e sottraendola dalla quarta, si ottiene $20x=1000$, onde $x=50$; e risalendo si troverà $y=20$, e $z=30$; bisognerà dunque prendere 50 emine dal primo miscuglio, 20 dal secondo, e 30 dal terzo.

ARTICOLO III.

Delle equazioni di 2° grado ad una sola incognita.

Equazioni pure; equazioni complete; soluzione delle equazioni di secondo grado pure. — Riduzione dell'equazione completa alla forma generale $x^2+px=q$. — Risoluzione dell'equazione generale. — Valore della somma e del prodotto delle due radici di un'equazione di secondo grado. — Quando le radici saranno reali, e quando immaginarie. — Esempi di equazioni di secondo grado colle loro soluzioni.

---

§ 30. Equazioni pure; equazioni complete; soluzione delle equazioni di 2° grado pure.

Le equazioni di secondo grado si distinguono in equazioni pure che contengono solamente il quadrato dell'incognita e quantità note, come

$$6x^2-13=4x^2+5,$$

ed in equazioni complete, nelle quali entra eziandio la prima potenza dell'incognita, come

$$4x+\frac{3}{5}x^2=4-2x.$$

Le equazioni pure di secondo grado ponno tutte ridursi alla forma $x^2=q$; denotando q un numero qualunque positivo o negativo: così dall' equazione $6x^2-13=4x^2+5$ si deduce subito $x^2=9$. Egli è evidente che quest'ultima equazione si risolve estraendo le radici quadrate de' suoi due membri; la quale operazione è permessa; poichè se due numeri sono eguali tra loro, anche le radici debbono essere eguali tra di loro: si dee osservare però, che siccome il numero 9 può provenire così dal prodotto di $+3$ per $+3$, come da quello di -3 per -3, rimane dubbio se il valore di x sia eguale a $+3$, oppure a -3;

ma entrambi questi valori verificando l'equazione proposta, per denotare questa duplicità del valore di x, gli si danno i due segni + e — scrivendo $x=\pm 3$.

Dall'equazione generale $x^2=q$, si conchiude similmente $x=\pm\sqrt{q}$: i due valori di x, cioè $+\sqrt{q}$ e $-\sqrt{q}$, che soddisfano all'equazione, si dicono le radici di essa.

Quesito I. Una persona, che tiene in una mano un certo numero di monete, dimanda ai circostanti d'indovinare qual sia questo numero, dichiarando per loro norma, che il quarto, più i due terzi di esso numero, eguagliano il quoziente di 132 diviso pel numero stesso delle monete.

L'equazione del problema sarà

$$\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}=\frac{132}{x};$$

che si trasforma in $11\,x^2=132\cdot 12$; e quindi in $x^2=144$; donde si ricava $x=\pm 12$. Questi due valori soddisfano ambedue all'equazione, ma il solo valore + 12 risolve il problema.

Quesito II. I corpi cadendo liberamente, astrazione fatta dalla resistenza dell'atmosfera, percorrono, in tempi diversi, spazi, che si contengono vicendevolmente tra loro, come i quadrati dei corrispondenti tempi impiegati a percorrerli. Questo principio si prova in fisica colla sperienza, e si dimostra in meccanica con ragionamenti rigorosi. I tempi e gli spazi si contano dal cominciamento del moto. E si è osservato, che lo spazio corrispondente al primo minuto secondo di tempo è di metri 4,9044.

Ciò posto, si dimanda quanti secondi impiegherà un corpo a cadere dall'altezza di $132^{\text{metri}},5347$, che si dice essere quella della sommità della croce di S. Pietro in Roma.

Chiamando x il numero dei secondi, l'equazione sarà

$$\frac{4^{\text{m}},9044}{132^{\text{m}},5347}=\frac{1}{x^2},$$

dalla quale si deduce $x^2=\frac{1325347}{49044}$, ossia $x^2=27,02$, e quindi $x=\pm\sqrt{27,02}=\pm5,2$; il solo valore positivo 5,2 risolve il problema. Così un corpo impiegherebbe 5", 2 a cadere da questa grande altezza.

Si è veduto (§ 16) ch'egli è impossibile di trovare un numero, il cui quadrato sia negativo, e che perciò le radici quadrate delle quantità negative diconsi immaginarie: quando adunque nell'equazione $x^2=q$, in luogo di q si avrà un numero affetto dal segno —, le radici dell'equazione saranno entrambe immaginarie, ed il problema sarà impossibile. Se si domandasse per es. un numero, il cui quadrato accresciuto di 15 fosse eguale a 6, si formerebbe l'equazione $x^2+15=6$, ossia $x^2=-9$, le cui radici $+\sqrt{-9}$ e $-\sqrt{-9}$ sono immaginarie: infatti l'impossibilità del problema proposto si scorge immediatamente dall'enunciato medesimo.

§ 31. Riduzione dell' equazione completa alla forma generale $x^2+px=q$.

Nel § precedente si è addotta l'equazione $4x+\frac{3}{5}x^2=4-2x$ come esempio delle equazioni complete di secondo grado: se si farà passare nel primo membro tutti i termini che contengono x^2 ed x, e nel secondo tutti i termini noti, essa diverrà $\frac{3}{5}x^2+6x=4$; e moltiplicando tutti i termini per $\frac{5}{3}$ si avrà $x^2+10x=\frac{20}{3}$. Se l'equazione proposta fosse stata quest'altra $4x-\frac{3}{5}x^2=4-2x$, operando allo stesso modo si sarebbe trovato $-x^2+10x=\frac{20}{3}$; nella quale il termine in x^2 ha il segno —: ma mutando i segni di tutti i termini essa si cangierebbe in

$x^2-10x=-\frac{20}{3}$. È manifesto, che operando nel modo stesso, qualsivoglia equazione di secondo grado potrà sempre ridursi alla forma $x^2+px=q$, nella quale il termine x^2 è positivo, e non ha altro coefficiente che l'unità, e le lettere p e q denotano quantità date qualunque intiere o frazionarie, positive o negative, od anche nulle.

§ 32. Risoluzione dell'equazione generale.

Per risolvere l'equazione $x^2+px=q$, che comprende come casi particolari tutte le altre di secondo grado ad una sola incognita, bisogna trasformare quest'equazione in altra equivalente, in cui il primo membro sia un quadrato perfetto; il che si farà facilmente, ricordandosi della formola del quadrato di un binomio $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$. Questa formola prova, che il terzo termine a^2, che compisce il quadrato del binomio $x+a$, è precisamente eguale al quadrato della metà del coefficiente di x nel secondo termine $2ax$.

Quindi si scorge, che se ai due termini x^2+px si aggiungerà il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè il quadrato di $\frac{1}{2}p$, che è $\frac{1}{4}p^2$, il trinomio che si otterrà sarà il quadrato di un binomio, e si avrà

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2;$$

e similmente se ai due termini x^2-px si aggiungerà il termine $\frac{1}{4}p^2$, si avrà ancora un quadrato perfetto, poichè

$$x^2-px+\frac{1}{4}p^2=\left(x-\frac{1}{2}p\right)^2.$$

Ciò posto, aggiungendo $\frac{1}{4}p^2$ ai due membri dell'equazione

$x^2+px=q$; l'eguaglianza dei due membri sussiste tuttavia, e si avrà un'equazione, il cui primo membro sarà quadrato perfetto. Si avrà così

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2;\ \text{ossia}\ \left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=q+\frac{1}{4}p^2;$$

ed estraendo la radice quadrata dai due membri, si avrà l'equazione del primo grado

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2};$$

dalla quale si ricava

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}.$$

L'incognita ha dunque due valori, cioè

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},\ \text{e}\ x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2};$$

questi due valori di x sono le radici della proposta equazione, cioè godono entrambi della proprietà di rendere i due membri di essa identicamente eguali tra loro, quando vi si sostituiscono in luogo di x, come è agevole il verificare col fatto.

Per risolvere ora un'equazione qualunque di secondo grado, si potrà paragonare l'equazione proposta alla formola generale $x^2+px=q$, e sostituire nei due valori di x trovati qui sopra, invece di p e q, i numeri corrispondenti della proposta, e finire il calcolo indicato. Oppure fare sulla proposta le operazioni praticate sulla formola generale: *cioè rendere il primo membro un*

quadrato perfetto, coll'aggiugnere ai due membri il quadrato della metà del coefficiente, che moltiplica la prima potenza dell'incognita; estrarre quindi la radice quadrata dai due membri, notando quella del secondo col doppio segno $\pm$, e trasportare nel secondo membro la parte cognita del primo.

§ 33. Valore della somma e del prodotto delle due radici di un'equazione di 2° grado.

Se per distinguere i due valori di x ricavati dall'equazione generale $x^2+px=q$, si denoteranno colle lettere accentate x' ed x'' si avrà

$$x'=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q},$$

$$x''=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q},$$

facendo la somma di questi due valori si avrà manifestamente $x'+x''=-p$; e facendone il prodotto (§ 8, 3° es.) verrà

$$x'x''=\left(-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}\right)\left(-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}p\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}p^2-\left(\frac{1}{4}p^2+q\right)=-q;$$

Questi due risultati $x'+x''=-p$, ed $x'x''=-q$ mostrano, che la somma delle due radici dell'equazione $x^2+px=q$, è eguale al

coefficiente p preso col segno contrario; e che il prodotto delle medesime radici è eguale al termine tutto cognito q preso parimente col segno contrario.

Quindi sarà facile il formare immediatamente una equazione di secondo grado, le cui radici sieno eguali a due numeri dati a e b, per es.: questa equazione sarà manifestamente

$$x^2-(a+b)x=-ab;$$

oppure portando il termine$-ab$ nel primo membro

$$x^2-(a+b)x+ab=0,$$

che equivale ancora all'equazione $(x-a)(x-b)=0$, alla quale si soddisfa manifestamente col fare $x=a$, oppure $x=b$, poichè nei due casi il primo membro diviene nullo, perchè uno de'suoi fattori diviene eguale allo zero.

§ 34. Quando le radici saranno reali, e quando immaginarie.

Le due radici dell'equazione di secondo grado $x^2+px=q$ contenendo entrambe il radicale

$$\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q},$$

esse saranno pure entrambe *reali* od entrambe *immaginarie*, secondo che la quantità $\frac{1}{4}p^2+q$ sarà positiva o negativa. Ora il primo termine $\frac{1}{4}p^2$ essendo il quadrato $\frac{1}{2}p$ non può mai essere negativo; epperciò quando q avrà un valore positivo, il binomio $\frac{1}{4}p^2+q$ sarà sempre positivo, e le due radici dell'equazione sa-

ranno *reali*; ma quando q avrà un valore negativo, la somma $\frac{1}{4}p^2+q$ si cangerà in una differenza: e se q, oltre ad essere negativo, sarà ancora, astrazion fatta dal segno, maggiore di $\frac{1}{4}p^2$, la quantità $\frac{1}{4}p^2+q$ sarà negativa, e le due radici dell'equazione saranno *immaginarie*.

Quindi si conchiude che, affinchè le radici di una equazione di secondo grado sieno immaginarie, è necessario:

1° *Che il termine cognito dell'equazione sia negativo nel secondo membro;*

2° *Che questo termine cognito, astrazion fatta dal suo segno, sia maggiore del quadrato della metà del coefficiente della prima potenza dell'incognita.*

Così le due radici dell'equazione $x^2+4x=6$ saranno entrambe *reali*, perchè il termine cognito 6 è positivo nel secondo membro.

Le due radici dell'equazione $x^2+4=-2$ saranno anch'esse reali, perchè il termine cognito -2, che qui è negativo, è minore del quadrato della metà del coefficiente di x, il quale quadrato è 4.

Ma saranno immaginarie le radici dell'equazione

$$x^2+4x=-6,$$

perchè il termine cognito -6 è nello stesso tempo negativo, e maggiore di 4 quadrato della metà del coefficiente di x.

Si vedrà ancora senza difficoltà che se q sarà negativo ed eguale, astrazion fatta dal segno, ad $\frac{1}{4}p^2$, la quantità $\frac{1}{4}p^2+q$ sarà eguale a zero, ed allora le due radici dell'equazione $x^2+px=q$ saranno entrambe eguali a $-\frac{1}{2}p$, e quindi anche eguali tra di loro: così nell'equazione $x^2+4x=-4$ il termine tutto cognito

essendo negativo, e numericamente eguale al quadrato 4 della metà del coefficiente di x, le due radici saranno eguali, ed il loro comune valore sarà -2.

§ 35. Esempi di equazioni di 2° grado colle loro soluzioni.

Ecco alcuni esempi di equazioni di secondo grado con le loro soluzioni, i quali mentre porgeranno opportunità di applicare la regola e le formole del § 32, gioveranno ancora a chiarire le conseguenze che si sono dedotte nei §§ 33 e 34.

I. Risolvere l'equazione $x^2+6x=160$: paragonandola colla formola generale si trova $p=6$, $q=160$; dunque $\frac{1}{2}p=3$, e $\frac{1}{4}p^2=9$, donde segue

$$x'=-3+13=10;\ \text{e}\ x''=-3-13=-16;$$

oppure compiendo il quadrato del primo membro si ha

$$x^2+6x+9=169;$$

ed estraendo la radice quadrata si trova $x+3=\pm13$; e quindi $x=-3\pm13$.

II. L'equazione $x^2-6x=160$ darebbe, secondo l'uno o l'altro metodo, $x=3\pm13$; ossia $x'=16$, e $x''=-10$.

III. L'equazione $x^2-8x=-15$, compiendo il quadrato diventa $x^2-8x+16=1$; ed estraendo la radice si ha $x-4=\pm1$, e quindi $x=4\pm1$, ossia $x'=5$, e $x''=3$.

IV. $x^2+5x=-4$ si cangierà in

$$x^2+5x+\frac{25}{4}=\frac{9}{4}$$

da cui si ricava $$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{3}{2};$$

e quindi $x=-\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}$; ossia $x'=-1$, e $x''=-4$.

V. $x^2-6x=-9$ da $x=3\pm0$, il che indica due radici eguali; similmente $x^2+6x=-9$ dà $x=-3$.

VI. Da $x^2-10x=-30$, si ricava $x=5\pm\sqrt{-5}$; cioè due radici immaginarie; il che indica che l'equazione appartiene ad un problema impossibile.

VII. $x^2-7x=0$ risoluta alla maniera delle altre precedenti, dà

$$x=\frac{7}{2}\pm\frac{7}{2};\ \text{ossia } x'=7;\ \text{e } x''=0;$$

oppure mettendo l'equazione sotto la forma $x(x-7)=0$, si vede subito che essa può essere soddisfatta da $x=0$, e da $x=7$; giacchè nei due casi il primo membro acquista un fattore zero, che rende nullo il prodotto.

Si risolverà ancora il problema seguente: spartire un numero dato, per esempio 20, in due parti tali, che il loro prodotto sia eguale ad un altro numero dato, che si chiamerà a.

Rappresentando con x la prima parte, la seconda sarà $20-x$; ed il loro prodotto sarà $20x-x^2$; dunque l'equazione del problema sarà $20x-x^2=a$, che si cangia in $x^2-20x=-a$ (§ 31): risolvendo quest'equazione secondo le regole precedenti si troverà

$$x=10\pm\sqrt{100-a};$$

la forma dei due valori di x fa vedere, che prendendo in vece di a un numero qualunque intero o frazionario, purchè sia minore di 100, si troveranno sempre o esattamente, o per approssimazione, due radici positive, che sono le due parti cercate del numero 20, perchè per la natura dell'equazione di secondo grado (§ 33) dovendo essere la somma delle due radici, cioè $x'+x''=20$, risulterà $x''=20-x$. Se si prende il prodotto $a=100$, le due radici o parti del numero 20 sono allora ambedue eguali a 10: e se si prende $a>100$, le due radici diventano immaginarie, e indicano così che il problema è allora impossibile.

Di qui si scorge generalmente, che non è possibile spartire un numero dato in due parti tali, che il loro prodotto sia più grande del quadrato della metà dello stesso numero dato.

Esaminando attentamente la forma delle espressioni generali delle radici delle equazioni di secondo grado, se ne possono agevolmente dedurre alcune conseguenze intorno ai segni da cui i valori delle radici si troveranno affetti, secondo il vario valore dei coefficienti p e q; ma queste sono facili a trovarsi da ciascuno, nè si crede di dovervisi arrestare.

CAPO V.

Delle ragioni e proporzioni.

Ragione aritmetica; ragione geometrica; antecedente e conseguente; termini della ragione. — Proporzione aritmetica od equidifferenza; proporzione geometrica o semplicemente proporzione; proporzione continua. — Proprietà dell'equidifferenza. — Proprietà delle proporzioni. — Osservazioni sopra le ragioni dirette ed inverse.

---

§ 36. Ragione aritmetica; ragione geometrica; antecedente e conseguente; termini della ragione.

La differenza di due numeri dicesi anche *ragione aritmetica* di questi due numeri: ed il loro quoziente *ragione geometrica*.

I due numeri, che si sottraggono l'uno dall'altro, o si dividono l'uno per l'altro, diconsi i due *termini della ragione*; ed il primo che si considera, chiamasi *antecedente*, il secondo *conseguente*.

Così proposti i due numeri 24 ed 8, la loro ragione aritmetica è $24-8=16$, e la loro ragione geometrica è $\frac{24}{8}=3$: il numero 24 è l'antecedente, il numero 8 è il conseguente.

La ragione geometrica dicesi anche spesso semplicemente *ragione*.

Dalla definizione delle due ragioni risulta chiaramente, che non si cangia il valore di una ragione aritmetica, aggiungendo ai due termini, o levando da essi uno stesso numero. Così:

$$12-5=13-6=11-4.$$

Parimente non si altera il valore di una ragione geometrica,

moltiplicando, o dividendo i due termini per uno stesso numero.

Così $$\frac{14}{4}=\frac{42}{12}=\frac{7}{2}.$$

§ 37. Proporzione aritmetica od equi-differenza; proporzione geometrica, o semplicemente proporzione; proporzione continua.

Quando la differenza tra due numeri 10 e 8, p. es., eguaglia quella di due altri numeri 7 e 5, questi quattro numeri formano ciò che si chiama *proporzione aritmetica* od *equi-differenza*: come $10-8=7-5$. L'equi-differenza suole anche scriversi nel modo seguente 10.8:7.5, e si enuncia 10 sta all' 8 come 7 sta al 5; il che significa che l' eccesso del 10 sull'8 è eguale a quello del 7 sul 5.

E quando il quoziente di due numeri $\frac{15}{5}$, per esempio, eguaglia quello di due altri numeri $\frac{36}{12}$, questi quattro numeri formano ciò che si chiama una *proporzione geometrica*, o semplicemente una *proporzione;* ed i quattro numeri che la formano diconsi tra loro proporzionali: così $\frac{15}{5}=\frac{36}{12}$ esprime una proporzione, che suole anche più spesso scriversi nella maniera seguente:

$$15:5::36:12\ ;$$

e si enuncia 15 sta al 5 come 36 sta al 12; il che significa che 15 contiene il 5 come 36 contiene il 12.

Tanto nell'equi-differenza, come nella proporzione, il primo ed il terzo termine si chiamano gli *antecedenti*; il secondo ed il quarto diconsi i *conseguenti:* il primo e l'ultimo si chiamano i *due estremi;* il secondo ed il terzo, i *due medii.*

Quando i due termini medii sono eguali, l'equi-differenza e la proporzione si chiamano allora continue. Così 12.9:9.6 è un'equi-differenza continua, che suole anche scriversi così ÷12.9.6.

Parimente 16:24::24:36 è una proporzione continua, che si nota anche nella maniera seguente ∺16:24:36; il secondo termine 24 si chiama medio proporzionale tra 16 e 36.

§ 38. Proprietà dell'equi-differenza.

In ogni equi-differenza la somma degli estremi è sempre uguale alla somma dei medii.

Così dall'equi-differenza 11.7:19.15, risulta evidentemente $11+15=7+19$; ma per darne una prova più generale, sia l'equi-differenza $a.b:c.d$; scrivendola sotto la forma $a-b=c-d$, e trasportando i termini negativi dall'uno all'altro membro risulterà $a+d=b+c$. Dunque in ogni equi-differenza la somma degli estremi è sempre uguale alla somma dei medii.

Inversamente se quattro numeri a, b, c, d sono tali, che si abbia $a+d=b+c$, questi numeri formeranno un'equi-differenza. Perchè sottraendo $b+d$ dai due membri dell'equazione, si ottiene $a+d-b-d=b+c-b-d$, e riducendo si trova

$$a-b=c-d, \text{ ossia } a \cdot b : c \cdot d.$$

Dunque i quattro numeri formano un'equi-differenza, di cui gli estremi sono i due termini di una delle somme eguali, ed i medii sono i due termini dell'altra somma.

La proprietà precedente serve a trovare uno dei quattro termini dell'equi-differenza, quando gli altri tre sono cogniti. Così da $17 \cdot 20 : 34 \cdot x$ si ricava $x=20+34-17=37$, e da $31 \cdot 23 : x \cdot 78$, si deduce $x=31+78-23=86$. Dunque *si troverà un estremo incognito, sottraendo dalla somma dei medii l'altro estremo cognito; e si troverà un medio, sottraendo dalla somma degli estremi il medio cognito.*

Nell'equi-differenza continua $\div 6 \cdot 8 \cdot 10$ il doppio del medio eguaglia la somma degli estremi; e se si avesse $\div 33 \cdot x \cdot 19$, si troverebbe prima $2x = 33 + 19$, e quindi $x = \frac{33+19}{2} = 26$. Dunque per inserire tra due numeri dati un medio aritmetico, bisogna prenderne la semi-somma.

§ 89. Proprietà delle proporzioni.

In ogni proporzione il prodotto degli estremi è sempre eguale al prodotto dei medii.

Sia $a:b::c:d$ una proporzione qualunque: essa può scriversi sotto la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e facendo sparire i denominatori si otterrà $ad = bc$. Così pure da $7:35::13:65$, si otterrà

$$7 \times 65 = 35 \times 13.$$

Inversamente se quattro numeri a, b, c, d sono tali, che il prodotto dei due estremi ad eguagli quello dei due medii bc, questi quattro formeranno una proporzione.

Perchè dall'equazione $ad = bc$ dividendo ambi i membri per bd si ricava $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$; ossia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; cioè $a:b::c:d$.

Onde si scorge che i due fattori di uno dei prodotti formano i due estremi della proporzione, ed i due fattori dell'altro prodotto formano i due medii.

Dalla precedente proprietà fondamentale risulta, che conoscendo tre termini di una proporzione, si potrà sempre trovare il quarto: e per questo basterà dividere il prodotto dei medii per l'estremo cognito, se si cerca un estremo: oppure, dividere il prodotto degli estremi pel medio cognito, quando si cerca un medio.

Perchè alla proporzione

$$a:b::c:x, \text{ oppure } b:a::x:c,$$

potendosi dare la forma di un' equazione $ax=bc$, si trae da questa $x=\frac{bc}{a}$. Così nella proporzione

$$18:24::72:x, \text{ si ha } x=\frac{24\cdot72}{18}=96.$$

La proporzione continua

$$\div a:b:c$$

essendo equivalente a quest'altra

$$a:b::b:c;$$

se ne conchiude, che in essa il prodotto degli estremi ac è eguale al quadrato del medio b^2; quindi dati i due estremi a, c, si ha $b=\sqrt{ac}$; cioè la media proporzionale b è eguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi: e dati a e b si ha $c=\frac{b^2}{a}$, cioè la terza proporzionale c è eguale al quadrato del medio, diviso pel primo termine.

Dalla proprietà fondamentale derivano molte altre:

1° *Si potrà cangiare l'ordine dei termini di una proporzione senza alterarla; purchè questi cangiamenti non distruggano l'eguaglianza fra il prodotto dei medii e quello degli estremi.*

Sarà dunque lecito di porre un medio al posto dell'altro, o un estremo al luogo dell'altro estremo; il che si chiama *alternare* i medii, o gli estremi: si può anche mettere i medii al luogo degli estremi, o gli antecedenti al luogo dei conseguenti; il che si chiama *invertere* la proporzione. Così col solo alternare o invertere i termini, una proporzione qualunque

può scriversi in otto maniere diverse; come si vede nell'esempio seguente:

12:4::6:2
12:6::4:2 alternando i medi della 1ª
4:12::2:6 invertendo la prima
4:2::12:6 alternando i medii della 3ª
6:2::12:4 ecc.
6:12::2:4
2:4::6:12
2:6::4:12

In ciascheduna di queste otto forme sussiste la proporzione, perchè il prodotto degli estremi è sempre eguale a quello dei medii, essendo i due termini, che erano estremi o medii nella prima, sempre insieme o estremi o medii in tutte le altre.

La ragione di ciascun antecedente al suo conseguente è differente da una di queste proporzioni all'altra; ma in ciascuna proporzione i due antecedenti hanno ragioni eguali coi loro rispettivi conseguenti.

2º *Si possono ancora moltiplicare, o dividere i due primi termini, o i due ultimi, i due antecedenti, o i due conseguenti per uno stesso numero, senza alterare la proporzione;* poichè queste operazioni non fanno altro, che introdurre nei due prodotti degli estremi, e dei medii, o togliere da essi un fattore comune; il che non potendo alterare la loro eguaglianza, lascia sempre sussistere la proporzione.

Qui si noteranno specialmente quelle proprietà, che sono di più frequente uso nella Geometria, e che meritano perciò di essere attentamente considerate dagli studiosi.

In ogni proporzione *la somma dei due primi termini sta al secondo, come la somma dei due ultimi sta al quarto.*

Così dalla proporzione 72:24::45:15, sommando si forma

$72+24:24::45+15:15$; conseguenza, che può facilmente verificarsi.

Ma volendone una prova più generale, si scriverà la proporzione sotto la forma di equazione $\frac{72}{24}=\frac{45}{15}$, ed aggiungendo l'unità ai due rapporti eguali si ha $\frac{72}{24}+1=\frac{45}{15}+1$; riducendo risulterà $\frac{72+24}{24}=\frac{45+15}{15}$; che è la stessa proporzione già ottenuta di sopra.

Se dai due rapporti eguali si leva l'unità, si ottiene

$$\frac{72}{24}-1=\frac{45}{15}-1;$$

e riducendo si avrà $\frac{72-24}{24}=\frac{45-15}{15}$;

ossia . . . . $72-24:24::45-15:15.$

Dunque 2° *la differenza dei due primi termini sta al secondo, come la differenza dei due ultimi sta al quarto.*

Le due proporzioni $72:24::45:15$;

e $72\pm24:24::45\pm15:15$,

alternandone i medii diventano

$$72:45::24:15,$$

$$72\pm24:45\pm15::24:15$$

Il secondo rapporto essendo lo stesso nelle due proporzioni, i due primi rapporti saranno eguali tra loro e daranno per conseguenza quest'altra proporzione

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 72 : 45.$$

La quale alternando i medii diventa

$$72 \pm 24 : 72 :: 45 \pm 15 : 45.$$

Dunque 3° *la somma o la differenza dei due primi termini sta al primo, come la somma o la differenza dei due ultimi sta al terzo.*

Si noti che quando si paragona la somma dei due termini di ciascuna ragione della proporzione coi rispettivi antecedenti o conseguenti, si dice *comporre la proporzione:* e quando si paragona la differenza dei termini cogli antecedenti o conseguenti, allora si dice *dividere la proporzione.* Così dalla proporzione $a : b :: c : d$,

componendo si ha $a + b : b :: c + d : d$,

e dividendo si avrà $a - b : b :: c - d : d$,

ecc.

In ogni proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al suo conseguente.

Sia la proporzione . . . . . $65 : 13 :: 35 : 7$;
alternando i medii si ha . . . . . $65 : 35 :: 13 : 7$;
ed applicandovi il teorema precedente si avrà

$$65 \pm 35 : 35 :: 13 \pm 7 : 7;$$

ed alternando nuovamente i medii risulterà

$$65 \pm 35 : 13 \pm 7 :: 35 : 7;$$

dunque in ogni proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, come ciascun antecedente sta al suo conseguente.

Separando quest'ultima in due

cioè $65+35:13+7::35:7$,

e $65-35:13-7::35:7$;

a cagione del secondo rapporto comune, risulterà ancora

$$65+35:13+7::65-35:13-7;$$

oppure alternando i medii

$$65+35:65-35::13+7:13-7.$$

Dunque *la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

Dalla proprietà precedente segue, che in una serie di rapporti eguali, per esempio,

$$2:6::3:9::4:12::5:15::\text{ecc.}\ \ldots$$

La somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente.

Ma si può anche dimostrare generalmente questa proprietà nella maniera seguente:

Rappresentando con m il valore comune di ciascun rapporto, si avrà $\frac{2}{6}=m, \frac{3}{9}=m, \frac{4}{12}=m, \frac{5}{15}=m$ ecc., e quindi $2=6m$, $3=9m$, $4=12m$, $5=15m$ ecc., sommando si avrà

$$2+3+4+5=(6+9+12+15)m;$$

e dividendo da ambe le parti pel coefficiente di m, si avrà

$$\frac{2+3+4+5}{6+9+12+15}=m=\frac{2}{6} \text{ o } \frac{3}{9} \text{ ecc.}$$

cioè $2+3+4+5:6+9+12+15::2:6$ o :: ecc.

Se due proporzioni hanno gli antecedenti comuni, i loro conseguenti sono proporzionali.

Siano le due proporzioni $a:b::c:d$, e $a:m::c:n$, alternando i medii esse diventano $a:c::b:d$, ed $a:c::m:n$; dalle quali a cagione del rapporto comune $a:c$ si deduce $b:d::m:n$.

Se due proporzioni avessero i conseguenti comuni, si dimostrerebbe medesimamente che i loro antecedenti sarebbero proporzionali.

Se due o più proporzioni si moltiplicano tra di loro per ordine, i prodotti risultanti sono ancora proporzionali.

Siano per esempio le tre proporzioni

$$2:4::3:6,$$
$$3:9::4:12,$$
$$7:28::6:24,$$

scrivendole sotto la forma

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6},\ \frac{3}{9}=\frac{4}{12},\ \frac{7}{28}=\frac{6}{24};$$

e moltiplicando i primi membri tra loro, ed i secondi tra loro, risulterà

$$\frac{2\cdot3\cdot7}{4\cdot9\cdot28}=\frac{3\cdot4\cdot6}{6\cdot12\cdot24},$$

ossia $2\cdot3\cdot7:4\cdot9\cdot28::3\cdot4\cdot6:6\ 12\cdot24,$

e facendo il calcolo si troverà

$$42:1008::72:1728.$$

Il valore comune dei due rapporti di quest'ultima pro-

porzione è il prodotto dei tre valori dei rapporti delle proposte. In generale si chiama *ragione composta*, o *rapporto composto* quello, i cui termini sono il prodotto dei corrispondenti termini di altri rapporti.

A questo riguardo si deve notare, che un rapporto composto di due altri rapporti eguali è un rapporto quadrato di ciascheduno di questi due; ed un rapporto composto di tre rapporti eguali, è un rapporto cubico di ciascheduno di questi tre.

Dalla proprietà precedente segue, che *quando quattro numeri sono in proporzione, i loro quadrati, cubi od altre potenze simili sono ancora in proporzione.*

Perchè la proporzione $a:b::c:d$ moltiplicata per se stessa diventa $a^2:b^2::c^2:d^2$; e moltiplicata due volte per se stessa diventerà $a^3:b^3::c^3:d^3$ ecc.

Dunque *inversamente* se quattro numeri sono in proporzione, le loro radici quadrate, cubiche, ecc. sono anche in proporzione. Così da $16:64::9:36$ si cava $4:8::3:6$; e da $6:24::8:32$ risulta

$$\sqrt{6} : \sqrt{24} :: \sqrt{8} : \sqrt{32}.$$

§ 40. Osservazioni sopra le ragioni dirette ed inverse.

Terminando questa esposizione delle principali proprietà delle proporzioni, si reputa opportuno di dichiarare il vero senso, in cui debbono prendersi alcune maniere di esprimersi, spessamente usate tanto nell'applicazione delle proporzioni alla risoluzione delle questioni aritmetiche, quanto nella spiegazione di certi fenomeni, o effetti naturali.

Così, per esempio, si suol dire, che una data quantità è in ragione diretta, od in ragione inversa di un'altra quantità di specie diversa, quantunque si sappia, che non può darsi vera ragione, se non tra quantità della medesima specie.

Per ispiegare questi modi di dire, basterà riflettere sulla natura delle relazioni, che esistono tra le differenti quantità, che entrano fra i dati di una medesima quistione, e non si tarderà a scoprire, che queste relazioni sono di due sorta; perchè talvolta crescendo una delle due quantità messe in confronto, cresce medesimamente l'altra; altre volte crescendo la prima, la seconda diminuisce; nel primo caso la relazione tra le due quantità si chiama *diretta*, e nel secondo si dice *inversa*. Così, per esempio, un operaio farà tanto più di lavoro quanto è più grande la sua forza: vi è dunque qui la relazione diretta tra la forza ed il lavoro: si dice in questo caso, che il lavoro è in ragione diretta della forza; e si deve intendere che i lavori fatti nelle medesime circostanze da due operai di forza diversa, sono proporzionali alle loro forze; oppure che la ragione dei due lavori è eguale alla ragione delle forze dei due operai. Al contrario, quanto è maggiore il numero degli operai impiegati in un dato lavoro, tanto minore sarà il numero dei giorni necessario per compierlo: vi è dunque una relazione inversa tra il numero degli operai e quello dei giorni, e si dice in questo caso che gli operai sono in ragione inversa dei giorni; e si deve intendere che la ragione tra due numeri d'operai è eguale alla ragione inversa dei corrispondenti numeri di giorni necessari pel compimento del lavoro.

Così quando il valore di una quantità è espresso da una frazione $\frac{a}{b}$ per esempio, quella quantità dicesi crescere in ragione diretta del numeratore a, ed in ragione inversa del denominatore b.

E si suole ancora dire nello stesso senso di sopra spiegato, che una quantità è in ragione diretta del quadrato, o del cubo di un'altra quantità, quando la prima cresce, come crescono i quadrati, od i cubi della seconda, e che al contrario una quantità è in ragione inversa del quadrato, o del cubo di un'altra, quando la prima diminuisce a misura che crescono i quadrati, od i cubi della seconda.

CAPO VI.

Applicazioni delle ragioni e proporzioni alla soluzione di alcune regole

Regola del tre semplice. — Regola del tre composta. — Regola d'interesse semplice. — Regola di sconto. — Regola di società o di partizione. — Regola congiunta o di cambio. — Regola di alligazione.

—

§ 41. Regola del tre semplice.

Quando gli elementi, od i numeri dati di un problema possono formare tra di loro una proporzione, nella quale l'incognita sia uno dei quattro termini, la regola del § 39 ne farà facilmente conoscere il valore.

L'operazione, col mezzo della quale si determina, in questo caso, il valore del termine incognito, si chiama *Regola del tre*; perchè da tre numeri cogniti se ne cava un quarto proporzionale ai tre dati. Dunque quando la soluzione di una questione dipende dalla regola del tre, basterà, per risolverla, saper formare convenientemente la proporzione, cioè disporre ciaschedun termine al posto, che deve occupare, secondo le relazioni che esistono tra le quantità date e l'incognita.

Alcuni esempi particolari saranno bastanti a dar norma per fare questa disposizione in tutti i casi.

Questione 1ª 30 *Operai hanno fatto* 20 *metri di lavoro*; 21 *operai quanti metri ne farebbero nello stesso tempo*?

È chiaro, che se il secondo numero d'operai fosse doppio del primo, tutte le altre condizioni essendo le stesse, il lavoro corrispondente sarebbe doppio del primo lavoro; e che la metà di

operai farebbe solamente la metà del lavoro. Dunque i due numeri d'operai sono nello stesso rapporto che i corrispondenti lavori; per conseguenza chiamando x il numero cercato di metri, si avrà la proporzione $30^{op}:21^{op}::20^{m}:x^{m}$, dalla quale risulta $x=14$ metri pel lavoro dei 21 operai.

Questione 2.ª 10 *Operai impiegarono* 40 *giorni per fare un dato lavoro*; 25 *operai quanti giorni impiegherebbero a fare lo stesso lavoro?*

È chiaro che quanto maggiore è il numero d'operai, tanto minor numero di giorni vi abbisogna per compiere un dato lavoro; così il cercato numero di giorni sarà contenuto in 40 giorni, come dieci è contenuto in 25; ossia il rapporto dei due numeri di operai sarà eguale al rapporto inverso dei giorni corrispondenti; si avrà dunque la proporzione $10^{op}:25^{op}::x^{g}:40^{g}$; e volendo conservare l'incognita x per ultimo termine della proporzione, s'invertirà il primo rapporto degli operai, e si scriverà quello dei giorni secondo l'ordine dell' enunciazione della questione; e si avrà così $25:10::40:x$, dalla quale, come dalla precedente, si ricava $x=16$ giorni.

Dai due esempi precedenti e dalla natura stessa della proporzione segue, che una questione appartenente alla regola del tre semplice, deve sempre contenere, nella sua enunciazione, quattro numeri, cioè tre cogniti, ed un quarto incognito; fra i tre numeri cogniti, due sono necessariamente della stessa specie tra loro, ed il terzo è di un'altra specie, ma sempre omogeneo col quarto incognito; di più ciascun termine della seconda specie si riferisce a ciascuno della prima in una maniera distinta e dichiarata dall'enunciazione. Ciò posto, ecco la regola per formare giustamente la proporzione in tutti i casi dalla relazione diretta o inversa, che hanno i due termini della prima specie coi loro corrispondenti della seconda, si riconoscerà facilmente se il termine incognito x debba essere più grande o più piccolo del suo omogeneo; ciò fatto, se si vuole che il termine incognito sia l'ultimo della proporzione, come si usa

più sovente, si scriverà prima il secondo rapporto tra i du[illegible] genei della seconda specie, mettendo x per cons[illegible] quindi si scriverà il primo rapporto in modo, che i [illegible]e antecedenti siano insieme o più grandi, o più piccoli dei loro conseguenti: in questo modo la proporzione sarà sempre bene ordinata; e quando vi è la relazione diretta tra i termini della prima specie e quelli della seconda, il termine x col suo corrispondente della prima specie sono sempre i due conseguenti della proporzione: se al contrario vi è relazione inversa, allora x col suo corrispondente della prima specie formano i due estremi della proporzione.

Si aggiungeranno ancora alcuni esempi.

13 Operai tagliarono 25 pietre simili in un dato tempo; quanti operai saranno necessari per tagliarne 175 nello stesso tempo?

Qui vi è la relazione diretta tra i termini della prima specie e quei della seconda; la proporzione sarà dunque $25:175::13:x$ $=91$ operai.

6 Squadroni di cavalli consumarono una provvisione di foraggio in 54 giorni; in quanti giorni 9 squadroni consumerebbero una provvisione eguale?

Essendovi qui relazione inversa tra i numeri della questione la proporzione sarà $9:6::54:x=36$.

Un vascello non ha più che per 12 giorni di viveri, e deve ancora star in mare 15 giorni; di quanto si dovrà diminuire la razione giornaliera dell'equipaggio?

Supponendo la razione che si dava prima $=1$, a cagione della relazione inversa, la proporzione sarà $15:12::1:x=\frac{4}{5}$.

Si dovrà dunque diminuire la razione di $\frac{1}{5}$.

§ 42. Regola del tre composta.

La regola del tre serve ancora a risolvere questioni contenenti più di quattro numeri. Essa piglia allora il nome di *regola del tre composta*, perchè il valore dell'incognita risulta da una proporzione, in cui il secondo rapporto è formato dal termine incognito e dal suo omogeneo; ed il primo rapporto è il prodotto di tutti gli altri rapporti dei termini omogenei enunciati nella questione. Eccone un esempio.

20 *Operai hanno fatto* 160 *metri di lavoro in* 15 *giorni*; 30 *operai quanti metri ne faranno in* 12 *giorni?*

Si dispongano i numeri nel modo seguente:

operai	*metri*	*giorni*
20	160	15 .
30	x	12.

È chiaro che il numero di metri cercato dipende dal suo omogeneo 160, dal rapporto dei due numeri d'operai, e dal rapporto dei due numeri di giorni.

Se quest' ultimo rapporto fosse eguale all'unità, o ciò che torna allo stesso, se il secondo numero di giorni fosse eguale al primo, allora la questione diventerebbe semplice, e simile a quelle già trattate negli esempi precedenti:

Cioè se 20 *operai fecero* 160 *metri di lavoro*, 30 *operai quanti metri ne farebbero nello stesso tempo?* E la proporzione

sarà $$20:30::160:x=\frac{160\cdot30}{20}=240.$$

Ma i 30 operai non lavorano 15 giorni come i primi, ma solamente 12 giorni; bisognerà dunque tener conto della diffe-

renza dei giorni di lavoro; e sotto questo riguardo, la questione potrà stabilirsi così:

30 *Operai lavorando* 15 *giorni fecero* $\frac{160 \cdot 30}{20}$ *metri di lavoro, quanti metri farebbero lavorando solamente* 12 *giorni?* La regola sarebbe ancora semplice e darebbe la proporzione

$$15:12::\frac{160 \cdot 30}{20}:x' = \frac{160 \cdot 30 \cdot 12}{20 \cdot 15} = 192 \text{ metri.}$$

Così i 30 operai faranno in 12 giorni 192 metri di lavoro.

Si osservi che il valore dell'incognita, cavato dalla proporzione precedente, è

$$x' = \frac{160 \cdot 30 \cdot 12}{20 \cdot 15};$$

e che, dividendo da ambe le parti per 160, si ottiene

$$\frac{x'}{160} = \frac{30 \cdot 12}{20 \cdot 15} = \frac{30}{20} \times \frac{12}{15}.$$

Dunque il rapporto del termine incognito col suo omogeneo è eguale al rapporto composto, formato dal prodotto dei due rapporti degli operai e dei giorni.

Moltiplicando 20 per 15, e 30 per 12, ed instituendo la proporzione $300:360::160:x$, la precedente regola del tre composta si cangierebbe in regola del tre semplice. Si noti che i due numeri 300 e 360 possono egualmente esprimere entrambi o operai o giornate di lavoro.

Sia ancora da risolversi la seguente questione:

18 *Operai lavorando* 10 *ore per giorno*, *impiegarono* 15 *giorni a fare* 24 *pezzi simili di un dato lavoro; quanti giorni*

impiegheranno 35 *operai, lavorando* 12 *ore al giorno, per farne* 56 *pezzi?*

Scrivendo i dati come segue:

operai	*ore*	*giorni*	*pezzi di lavoro*
18	10	15	24
35	12	x	56,

e facendo l'analisi della questione, come nel caso precedente, oppure applicandovi subito la conseguenza notata qui sopra, si troverà

$$\frac{x}{15}=\frac{18}{35}\times\frac{10}{12}\times\frac{56}{24};$$

il che dà $x=\frac{15\cdot 18\cdot 10\cdot 56}{35\cdot 12\cdot 24}=15$ giorni.

Così il numero dei giorni è lo stesso nei due casi.

Si faccia qui attenzione, che i due rapporti degli operai e delle ore sono scritti in un ordine inverso a quello dei giorni e dei pezzi di lavoro; il che è conforme ai principii stabiliti precedentemente; perchè gli operai e le ore sono in relazione inversa coi giorni, mentre i giorni ed i pezzi di lavoro sono tra loro in relazione diretta.

§ 43. Regola d'interesse semplice.

Il danaro, apportando un certo benefizio o guadagno a chi sa impiegarlo e farlo valere nel traffico, è ragionevole che chi piglia in prestito una somma di denaro, debba, rendendola, aggiugnervi un soprappiù, che possa ricompensare il prestatore dell'utile, che avrebbe potuto ritrarre da quella somma, impiegandola egli stesso.

La somma prestata si chiama *capitale*; l' utile che si ritrae

interesse; e l'operazione, mediante la quale si calcola l'interesse di una data somma, impiegata per un dato tempo, si chiama *regola d'interesse*, la quale non è che un caso particolare della regola del tre semplice o composta.

Si chiama *tassa*, o *unità d'interesse*, e più comunemente *ragione d'interesse*, l'utile che si ritrae da una somma determinata, in un tempo anche determinato. Ordinariamente quest'unità è l'utile che apportano 100 lire prestate per un anno. Quindi si dice interesse al cinque, al quattro, al tre per cento o per centinaio, ecc., per significare che 100 lire ne fruttano 5, 4, o 3, ecc.

La tassa dell'interesse è convenuta tra il prestatore e chi riceve il prestito; e dipende generalmente dall'abbondanza o scarsezza di *capitali*, ed anche da altre circostanze.

Esempio. Si dimanda l'interesse di 10000 lire prestate per 2 anni e 5 mesi al 5 per cento all'anno (che si suole scrivere così: 5 p. $^0/_0$).

Facendo astrazione dal numero diverso degli anni, si cercherà prima l'interesse annuo di 10000 lire nell'ipotesi, che 100 rendano 5 lire.

Pare a prima vista, che i quattro numeri della questione sieno tutti della medesima specie, poichè esprimono tutti delle lire; ma si osservi che 100 e 10000 rappresentano due capitali, e che 5 lire e x lire sono i loro interessi.

Essendovi relazione diretta tra i capitali ed i loro interessi, si avrà la proporzione

$$100:10000::5:x=500 \text{ lire.}$$

Per avere ora l'interesse dei 2 anni e 5 mesi, si dovrebbe fare una nuova proporzione, cioè

$$1:2\frac{5}{12}::500:x';$$

ma si scorgerà subito che basta moltiplicare l' interesse annuo 500 lire per $2\frac{5}{12}$; il che darà 1208^{11},33 per l'interesse di 2 anni e 5 mesi.

Quando la tassa dell'interesse è un divisore esatto di 100, si calcola più speditamente l'interesse annuo, dividendo solamente il capitale pel quoziente di 100 diviso per la tassa.

Così l'interesse essendo al 5 p. °/₀, basta dividere il capitale per 20, ed il quoziente sarà l'interesse annuo; al 4 p. °/₀ si dividerà il capitale per 25; e si dividerebbe per 30 o per 40 se l'interesse fosse al $3\frac{1}{3}$ o al $2\frac{1}{2}$ p. °/₀; il 10 p. °/₀ darebbe la decima parte del capitale; ed il 2 p. °/₀ darebbe la cinquantesima parte.

In generale, qualunque sia il capitale, la tassa e il tempo dell' impiego, il modo di calcolare l' interesse è sempre lo stesso.

Così rappresentando con *a* un capitale qualunque, con *i* l'interesse annuo di 100 e con *t* il tempo dell'impiego del capitale, si avrà sempre la proporzione $100:a::i:x=\frac{ai}{100}$, che sarà l' interesse annuo di *a*; e per avere l'interesse relativo a qualsivoglia numero *t* di anni, che si rappresenterà con *X*, si moltiplicherà l'interesse annuo trovato per *t*, il che darà $X=\frac{ait}{100}$.

Questa formola significa, che per avere l' interesse di una somma data a mutuo per un dato tempo, e ad una data tassa d' interesse, *bisogna moltiplicare la somma proposta per la tassa dell'interesse, e per la durata del mutuo espressa in anni, e dividere il risultato per* 100.

Qualche volta la tassa dell'interesse è data non per un anno, ma solamente per un mese; come quando si dice a$\frac{1}{2}$ a$\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{5}$ p. °/₀ al mese. In questo caso si prende il mese per unità di tempo, e se vi sono mesi e giorni, si riducono i giorni in frazioni di mese; ma la maniera di operare è sempre la stessa.

Si noti ancora che la formola del numero precedente $X=\frac{ait}{100}$ contiene quattro quantità indeterminate, cioè X, a, i, t; delle quali tre qualunque essendo conosciute, si potrà facilmente ricavare dalla formola stessa il valore della quarta incognita.

Così per a sola incognita si trova $a=\frac{100X}{it}$;

per l'incognita i si avrà $i=\frac{100X}{at}$;

e per l'incognita t risulta $t=\frac{100X}{ai}$.

Si possono dunque proporre quattro questioni diverse riguardo ai capitali impiegati a interesse semplice; delle quali una sola è stata qui sopra enunciata e discussa, ed è quella che s' incontra più frequentemente; le altre tre possono facilmente prevedersi dalle formole corrispondenti a ciascheduna incognita particolare.

§ 44. Regola di sconto.

Nel linguaggio del commercio chiamasi *sconto* il diffalco che si fa sopra una somma pagata innanzi tempo, cioè prima della scadenza del pagamento. E si chiama *regola di sconto* l' operazione, mediante la quale si calcola questa diminuzione. Eccone un esempio.

Un negoziante deve ad un altro 10000 lire pagabili fra un anno; questi avendo bisogno di danaro vende il suo credito ad un banchiere, contrattando lo sconto sulla base dell'interesse al 6 per °/₀ all'anno; si dimanda quanto dovrà sborsare il banchiere, oppure quale diminuzione dovrà fare sulla somma totale.

È chiaro che il venditore deve solamente ricevere una somma

tale che, unita al suo interesse di un anno, faccia 10000 lire. Ora l'interesse essendo al 6 p. $_0/^0$ all'anno, 100 lire diventano in un anno 106; dunque un debito di 106 lire pagabile dopo un anno, si pagherebbe al presente con sole 100 lire; e per conseguenza si avrà il valore presente di 10000 lire pagabili dopo un anno, facendo la proporzione seguente:

$$106:100::10000:x=9433^{\text{ll.}}, 96.$$

Volendo la diminuzione da farsi sulla somma intiera, si farà quest'altra proporzione:

$$106:6::10000:x'=566^{\text{l.}},04.$$

Il valore di x della prima proporzione è la somma scontata, che il banchiere deve sborsare; e quello di x' della seconda è lo sconto da farsi sulla somma totale.

Lo sconto è manifestamente eguale all'interesse annuo della somma scontata; e questi due valori sommati insieme eguagliano la somma totale.

Le due operazioni precedenti costituiscono la vera maniera di scontare una somma. Nondimeno i negozianti non s'attengono a questa regola; essi scontano per l'ordinario a tanto per 100 all'anno, o al mese, e stabiliscono una regola di sconto affatto simile a quella d'interesse; cioè levano dalla somma totale il suo interesse, in vece di levare solamente l'interesse della somma già scontata.

Così nell'esempio precedente in vece di levare solamente $566^{\text{ll.}},04$ della somma totale, levano $600^{\text{l.}}$, e sborsano solamente $9400^{\text{ll.}}$ in pagamento anticipato delle 10000 lire.

Vi sarebbe dunque tra i due risultati una differenza di $33^{\text{ll.}},96$ tutta a profitto del banchiere. Dal che risulta, che il secondo modo di scontare è sempre favorevole a chi sconta, ed a pregiudicio di chi riceve la somma scontata.

Tuttavia questo secondo modo è generalmente in uso nel

commercio, a cagione della sua facilità e speditezza, e si può anche aggiungere che quest'è un affare di pura convenzione tra il venditore ed il compratore del credito.

Per distinguere i due modi di scontare una somma, si chiama il primo, *scontro addentro*, o *intrinseco*; ed il secondo, *sconto al di fuori*, o *estrinseco*.

§ 45. Regola di società o di partizione.

Questa regola ha per oggetto di dividere tra più soci il guadagno, o la perdita risultante da un commercio fatto in comune.

1° *Esempio.* Tre soci hanno messo in comune commercio il primo 24000^{ll.}, il secondo 16000^{ll.}, ed il terzo 8000^{ll.}; ed hanno guadagnato 10860^{ll.}; si domanda di spartire questo guadagno in ragione delle *messe* di ciascun socio.

La somma totale delle *messe*, o *poste* 48000^{l.} apportando un guadagno di 10860^{ll.}, chiamando x, x' ed x'' i rispettivi guadagni del primo, secondo e terzo socio, si faranno le tre proporzioni seguenti:

$$48000 : 10860 :: 24000 : x = 5430^{\text{ll.}}$$
$$48000 : 10860 :: 16000 : x' = 3620$$
$$48000 : 10860 :: 8000 : x'' = 1810$$
$$\overline{10860^{\text{ll.}}}$$

È chiaro che la somma dei guadagni particolari deve eguagliare il guadagno totale.

Quando tutte le *messe* de' soci restano lo stesso tempo in società, i guadagni sono proporzionali alle *messe*. E quando le messe restano nella società per tempi diversi, allora i guadagni sono proporzionali ai prodotti delle messe pei tempi corrispondenti.

2° *Esempio.* Tre negozianti hanno messo in società, il primo 10000 lire per 7 mesi, il secondo 8000 per 5 mesi, ed il terzo 4000 per 20 mesi: ed hanno guadagnato 15000 lire.

Si dimanda qual parte del guadagno toccherà a ciascuno di essi.

Si deve qui osservare che 10000$^{\text{li.}}$ per 7 mesi rendono lo stesso che 70000$^{\text{li.}}$ in un mese; parimente 8000 per 5 mesi fanno lo stesso, che 40000 in un mese; e 4000 per 20 mesi equivalgono a 80000 per un mese.

Così riferendo tutte le *messe* allo stesso tempo, cioè ad un mese, esse diventano 70000, 40000, e 80000; ed instituendo, tra queste nuove messe ed il guadagno dato, le proporzioni come nell'esempio precedente, si troverà 5526$^{\text{li.}}$. 32; 3157$^{\text{li.}}$, 89; e 6315$^{\text{li.}}$, 79 pei corrispondenti guadagni dei tre soci.

Generalmente la regola di società serve a dividere un numero qualunque dato in parti proporzionali ad altri numeri dati; così, per esempio, per dividere il numero 60 in tre parti proporzionali ai numeri 3, 4, e 5, basterà sommare insieme questi tre numeri, e formare le proporzioni

$$12 : 60 :: 3 : x = 15,$$

$$12 : 60 :: 4 : x' = 20,$$

$$12 : 60 :: 5 : x'' = 25,$$

oppure, senza formare le proporzioni, basterà dividere il numero 60 per 12, e moltiplicare separatamente il quoziente 5 per ciascuno dei tre numeri dati 3, 4, 5; si otterranno così i numeri 15, 20, e 25 per le tre parti di 60, proporzionali ai numeri 3, 4, 5.

La regola di partizione è di un uso frequentissimo nell' amministrazione tanto delle cose private, come delle pubbliche. Così, per esempio, col mezzo di questa regola, si sparte primieramente l'imposta totale di uno Stato fra le diverse provincie del mede-

simo, proporzionalmente alle rendite presupposte delle stesse provincie.

2° Si divide parimente l' imposta particolare di ciascuna provincia fra i diversi comuni della medesima proporzionalmente alle rendite di tutti i terreni di ciascun comune.

3° L'imposta di ciascun comune si suddivide medesimamente fra tutti i possessori di stabili posti nello stesso comune, e sempre proporzionalmente al prodotto annuo degli stabili medesimi.

In questo modo si formano i così detti registri o libri esattoriali, dove sono notati, per ordine alfabetico, tutti i possidenti grandi e piccoli del comune, colle loro corrispondenti partite di tributo, che debbono pagare all'esattore del mandamento.

§ 46. Regola congiunta o di cambio.

Chiamasi *regola congiunta* l'operazione, che si fa per determinare il rapporto delle monete, o misure di due paesi, col mezzo dei rapporti conosciuti di queste monete o misure, come quelle di altri paesi.

Per esempio, sapendo che 100 ghinee inglesi valgono 2626 lire piemontesi, che 63 li. piemontesi valgono 30 fiorini d'Olanda, che 146 fiorini d'Olanda valgono 15 federici d'oro di Prussia, si dimanda quanti federici varranno 73 ghinee.

Soluzione: 100 ghinee valendo 2626 lir. piem., è chiaro che

1 ghinea varrà $\frac{2626}{100}$ di lira piem.;

parimente 1 lira piem. . . . . . $\frac{30}{63}$ di fiorino;

1 fiorino . . . . . . $\frac{15}{146}$ di feder.

Dunque 1 ghinea varrà in federici

$$\text{i } \frac{2626}{100} \text{ dei } \frac{30}{63} \text{ dei } \frac{15}{146};$$

e per conseguenza

$$73^{gh.} = \frac{73 \cdot 2626 \cdot 30 \cdot 15}{100 \cdot 63 \cdot 146} = 93^{fed.},\ 78.$$

Si abbrevierà il calcolo sopprimendo prima i fattori comuni ai due termini dell'espressione frazionaria.

Col mezzo dei rapporti conosciuti del piede liprando col metro, e del metro coll'antico piede parigino, si potrà nello stesso modo valutare un numero qualunque di misure piemontesi in antiche misure francesi, e *viceversa*.

La regola congiunta fu così chiamata, perchè consiste appunto nel congiungere insieme, per via di moltiplicazione, due o più rapporti dati, onde formarne un solo composto, e sotto questo aspetto essa porge un'applicazione particolare della regola delle frazioni di frazioni. In quanto al nome di regola di cambio, risulta palesemente dall'esempio addotto.

§ 47. Regola d'alligazione.

Serve questa regola a trovare il valore dell'unità di misura di un miscuglio qualunque, conoscendo la quantità de' suoi componenti ed il valore particolare delle loro unità Eccone un esempio :

Una persona comprò tre qualità di chiodi: cioè 50 kilogr. a soldi 19; $72^{k.}$ a soldi 21; e $38^{k.}$ a soldi 23; supponendoli mescolati insieme, oppure a valore accomunato, si dimanda a quanto viene il kilogramma. È chiaro che

$50^{k.}$	a ss. 19 costano	$47^{ll.}$	$10^{ss.}$
72	a ss. 21	75	12
38	a ss. 23	43	14
$160^{k.}$	costano	$166^{ll.}$	$16^{ss.}$

Dunque per avere il prezzo comune di un chilogramma, basterà dividere $166^{ll.}\ 16^{ss.}$ per 160; e si troverà $1^{ll.}\ 0^{ss.}\ 10^{dd.}\frac{1}{5}$ pel ricercato prezzo di un chilogramma.

Alcuni chiamano prezzo medio il risultato così ottenuto; ma bisogna osservare, che ciò sarà solamente vero, quando le quantità di ciascuna specie sono eguali; in questo caso, si ottiene il prezzo medio, dividendo la somma dei tre prezzi del kilogramma, cioè $3^{ll.}\ 3^{ss.}$ per 3; si ha così $1^{l.}\ 1^{s.}$ pel prezzo medio.

Questa regola serve ancora a prendere il valore medio tra più risultati, che non s'accordano insieme esattamente, cioè tra i quali passa qualche leggera differenza. Così per esempio, quando si misura replicatamente una lunghezza, cui importi conoscere con qualche esattezza, non è probabile che si ottenga in tutte le operazioni di misura lo stesso risultamento. Supponendo dunque che una prima misura abbia dato $451^{metri},956$, una seconda $452^{m.},003$, ed una terza $451^{m.}833$; si dimanda quale sarà la lunghezza da prendersi.

Si risponde che il valore medio tra le tre misure, se non è il valore vero della lunghezza, deve almeno accostarsi alla vera lunghezza più che non fa ciascun risultato particolare; perchè probabilmente gli errori non sono tutti nello stesso senso, e debbono perciò annullarsi in parte nel valor medio. Allora l'errore, che potrà ancora trovarsi nel valor medio, sarà tanto più piccolo, quanto è più grande il numero delle misure fatte, giacchè esso è distribuito sopra tutte le misure. Così la somma delle tre misure essendo $1355^{m.},792$, il terzo di questa somma, cioè $451^{m.},930$, sarà la lunghezza cercata.

CAPO VII.

Delle progressioni.

ARTICOLO I.

Definizioni.

---

§ 18. Definizioni.

Una serie di numeri, tali che la ragione, aritmetica o geometrica, di uno di essi a quello che lo precede è dappertutto la medesima, dicesi *progressione aritmetica* o *geometrica*. Così i numeri 2, 5, 8, 11, 14, 17 formano una progressione aritmetica, ed i numeri 1, 2, 4, 8, 16 una progressione geometrica; la prima si suole scrivere

$$\div 2.5.8.11.14.17,$$

e la seconda

$$\div\div 1:2:4:8:16.$$

Le progressioni aritmetiche diconsi anche *progressioni per differenza*, e le geometriche *progressioni per quoziente*.

I numeri che formano una progressione chiamansi *termini della progressione*. Il primo e l'ultimo termine diconsi *termini estremi*. La ragione, aritmetica o geometrica, di un termine a quello che lo precede si chiama *ragione della progressione*.

Una progressione dicesi *crescente*, o *decrescente*, secondochè i suoi termini, cominciando dal primo, vanno continuamente aumentando o diminuendo. In una progressione aritmetica la ragione è positiva o negativa, secondochè la progressione è crescente o decrescente. Nelle progressioni geometriche crescenti la ragione è maggiore dell'unità; nelle decrescenti è minore dell'unità e positiva. Una progressione geometrica, in cui la ragione è negativa, ha i termini alternativamente positivi e negativi, e perciò non è nè crescente, nè decrescente.

ARTICOLO II.

Progressioni per differenza.

Espressione di un termine qualunque. — Inserzione di medii aritmetici tra due numeri dati. — Se si inserisce uno stesso numero di medii aritmetici fra il 1° ed il 2° termine, fra il 2° ed il 3°, ecc. di una progressione per differenza, la serie di numeri risultante è ancora una progressione. — In ogni progressione per differenza la somma di due termini equidistanti dagli estremi è eguale alla somma degli estremi. — Espressione della somma dei termini di una progressione per differenza.

---

§ 49. Espressione di un termine qualunque.

Sia a il primo termine ed r la ragione di una progressione per differenza; sarà evidentemente il secondo termine $=a+r$, il terzo $=a+2r$, il quarto $=a+3r$, ecc., ed in generale il termine n^{esimo}, rappresentandolo con l, sarà

$$l=a+(n-1)r \qquad (1).$$

Da questa equazione, quando sono date tre delle quattro quantità a, l, r, n, si può ricavare la quarta. Si voglia, per esempio, il cinquantesimo termine della progressione

$$\div 201 \,.\, 198 \,.\, 195 \ldots$$

In questo caso $a=201$, $r=-3$, ed $n=50$; dunque l, ossia il termine richiesto, è $=201-49\times 3=54$.

2° *Esempio.* Si domanda se nella progressione

$$\div 3 \,.\, 20 \,.\, 37.....$$

vi sia un termine eguale a 450. Qui $a=3$, $r=17$, $l=450$, e l'incognita è n. Risolvendo l'equazione (1) rispetto ad n, si ha

$$n=\frac{l-a+r}{r};$$

sostituendo quindi invece di a, l, ed r i loro valori, si trova

$$n=21+\frac{7}{17}.$$

Questo risultato dimostra che nella progressione proposta non havvi un termine eguale a 450.

§ 50 Inserzione di medii aritmetici fra due numeri dati.

Col mezzo dell'equazione (1) si può anche facilmente risolvere il seguente problema: *inserire fra due numeri dati*, a *ed* l, *un dato numero*, m, *di medii aritmetici, ossia trovare* m *numeri i quali, posti fra* a *ed* l, *formino con essi una progressione per differenza.* Ed invero questo problema si può riguardare come risolto, quando si conosca la ragione della progressione che si vuol formare; ora questa ragione si ha ponendo $m+2$ in vece di n nell'equazione (1), e risolvendola rispetto ad r. Fatte tali operazioni, si trova

$$r=\frac{l-a}{m+1}.$$

§ 51. Se si inserisce uno stesso numero di medii aritmetici fra il 1° ed il 2° termine, fra il 2° ed il 3°, ecc. di una progressione per differenza, la serie di numeri risultante è ancora una progressione.

Sia la progressione $\div a.\ b.\ c.\ d\ldots$. Se fra a e b, fra b e c, fra c e d, ecc. s'inserisce uno stesso numero, m, di medii aritmetici, le ragioni delle progressioni risultanti saranno eguali (§ ant.)

rispettivamente a $\frac{b-a}{m+1}$, $\frac{c-b}{m+1}$, $\frac{d-c}{m+1}$, ecc.;

ma $b-a=c-b=d-c=$ ecc. $=$ alla ragione della progressione data; dunque siffatte progressioni ne formeranno una sola, la cui ragione sarà eguale alla ragione della progressione data divisa per $m+1$.

§ 52. In ogni progressione per differenza la somma di due termini equidistanti dagli estremi è eguale alla somma degli estremi.

Siano a ed l il primo e l'ultimo termine di una progressione per differenza, x il termine che ne ha p avanti, y quello che ne ha p dopo, ed r la ragione; si avrà (§ 49)

$$x=a+pr,$$

e, giacchè y si può considerare come il termine $(p+1)^{esimo}$ della progressione che si ottiene scrivendo in ordine inverso i termini della progressione data,

$$y=l-pr.$$

Addizionando, membro a membro, le precedenti uguaglianze, si ha

$$x+y=a+l;$$

dunque la somma di due termini equidistanti dagli estremi è eguale alla somma degli estremi.

§ 53. Espressione della somma dei termini di una progressione per differenza.

Occorre sovente di dover trovare la somma dei termini di una progressione per differenza. La proprietà delle progressioni per differenza, dimostrata nel § antecedente, somministra il modo di determinarla quando sono dati il primo e l'ultimo termine, ed il numero dei termini.

Infatti sia la progressione $\div a.b.c.\ldots i.k.l$, e si rappresentino con n il numero con S la somma dei termini, sarà

$$S=a+b+c+\ldots+i+k+l,$$

e, scrivendo i termini di quest'espressione in ordine inverso, si avrà ancora

$$S=l+k+i+\ldots+c+b+a.$$

Se si addizionano, membro a membro, queste uguaglianze, si ha

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\text{ecc.};$$

ma $a+l=b+k=c+i=$ ecc. (§ ant.),

dunque $2S=(a+l)\,n$, e per conseguenza

$$S=(a+l)\frac{n}{2} \qquad (2).$$

Abbiasi, per esempio, da trovar la somma dei numeri interi 1, 2, 3, ecc. sino ad n. Formando questi numeri una progressione per differenza di n termini, di cui il primo è 1, e l'ultimo è n, la loro somma è

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2° *Esempio*. Si cerchi la somma degli n primi numeri impari 1, 3, 5, 7, ecc. Si ha qui una progressione per differenza, in cui il primo termine è 1 e la ragione è 2; dunque il termine n^{esimo} è $=1+2(n-1)=2n-1$ (§ 49),

epperciò $$S=2n.\frac{n}{2}=n^2.$$

Notisi che colle equazioni (1) e (2) si possono determinare due delle cinque quantità a, l, r, n ed S, quando siano cognite le altre tre.

ARTICOLO III.

Progressioni per quoziente.

Espressione di un termine qualunque. — Inserzione di medii geometrici fra due numeri dati. — Se si inserisce fra il 1° ed il 2° termine, fra il 2° ed il 3°, ecc. di una progressione per quoziente uno stesso numero di medii geometrici, la serie di numeri risultante è ancora una progressione. — In ogni progressione per quoziente il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è eguale al prodotto degli estremi. — Espressione della somma dei termini di una progressione per quoziente.

---

§ 51. Espressione di un termine qualunque.

Dalla definizione delle progressioni per quoziente data nel § 48, risulta che, essendo a il primo termine ed r la ragione di una progressione per quoziente, il secondo termine è $=ar$, il terzo $=ar^2$, il quarto $=ar^3$, ecc., ed in generale il termine n^{esimo} è, chiamandolo l,

$$l=ar^{n-1} \qquad (3).$$

Quando si conoscono tre delle quattro quantità a, l, r, ed n, dall' equazione (3) si può ricavare il valore della quarta. Tale equazione è facile a risolversi, se l'incognita è a.

Se l'incognita è r, si ha

$$r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}.$$

Già nel capo terzo s' insegnò il modo di estrarre dai

numeri le radici, il cui indice è una potenza di 2, o di 3, od il prodotto di una potenza di 2 per una potenza di 3. Nel capo seguente si vedrà come si possa trovare, esattamente o per approssimazione, il valore di una radice qualunque di un dato numero col mezzo dei logaritmi.

Mediante i logaritmi si può anche facilmente risolvere l'equazione (3) rispetto a n.

§ 55. Inserzione di medii geometrici fra due numeri dati.

Per *inserire, fra due numeri, a ed l, un dato numero, m, di medii geometrici, ossia i numeri i quali formino, con a ed l, una progressione geometrica*, basta sostituire $m+2$ invece di n nella formola $r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$ del § antecedente; la formola che così si ottiene,

$$r=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}},$$

dà la ragione della progressione cercata.

§ 56. Se s'inserisce fra il 1° ed il 2° termine, fra il 2° ed il 3°, ecc. di una progressione per quoziente uno stesso numero di medii geometrici, la serie di numeri risultante è ancora una progressione.

Sia la progressione $\div a:b:c:d.....$ Se fra a e b, fra b e c, fra c e d, ecc. s'inserisce uno stesso numero, m, di medii geo-

metrici, si avranno progressioni, le cui ragioni saranno rispettivamente eguali a

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}, \text{ ecc.};$$

ma $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}$, = ecc. = alla ragione della progressione data; dunque tali progressioni ne formeranno una sola avente per ragione la radice $(m+1)^{esima}$ della ragione della progressione data.

§ 57. In ogni progressione per quoziente il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è eguale al prodotto degli estremi.

Siano a e l il primo e l'ultimo termine di una progressione per quoziente, x il termine che ne ha p avanti, y quello che ne ha n dopo, e r la ragione; sarà (§ 54)

$$x=ar^p$$

e, siccome scrivendo in ordine inverso i termini della progressione, se ne ha una in cui y è il termine $(p+1)^{esimo}$ e la ragione è $\frac{1}{r}$, sarà ancora

$$y=\frac{l}{r^p}.$$

Se si moltiplicano l'una per l'altra, membro a membro, le precedenti eguaglianze, si avrà

$$xy=al;$$

dunque il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è eguale al prodotto degli estremi.

§ 58. Espressione della somma dei termini di una progressione per quoziente.

Rappresentisi con S la somma degli n primi termini di una progressione per quoziente, di cui il primo termine sia a e la ragione r; sarà (§ 54)

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Si moltiplichino per r i due membri di questa eguaglianza: si avrà

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n,$$

e, sottraendo, membro a membro, la prima eguaglianza da quest'ultima, si otterrà

$$rS - S = ar^n - a,$$

equazione la quale, risolta, dà

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

Se si osserva che, chiamando l il termine n^{esimo}, si ha (§ 54) $ar^n = lr$, avrassi ancora

$$S = \frac{lr - a}{r - 1}.$$

CAPO VIII.

Formazione delle potenze ed alcune nozioni sui radicali.

Innalzamento dei monomii algebrici ad una potenza qualunque. — Estrazione delle radici dei monomi algebrici. Esponenti frazionari. — Osservazioni intorno ai segni delle quantità esponenziali. Alcune nozioni sui radicali.

---

§ 59. Innalzamento dei monomii algebrici ad una potenza qualunque.

La *potenza* di una quantità è il prodotto di essa quantità moltiplicata una o più volte per se stessa, ed il grado della potenza è segnato dall'*esponente* della quantità, ossia dal numero de'fattori uguali di cui vien formato il prodotto (§§ 6 e 14).

Così a^2, a^3, a^4, ecc. indicano la seconda, la terza, la quarta, ecc. potenza della quantità o fattore a, od in altri termini, il prodotto di

$$a \times a, \qquad a \times a \times a, \qquad a \times a \times a \times a, \text{ ecc.}$$

Ed in termini generali, a^m indica la potenza del grado m di a, ossia il prodotto di tanti fattori uguali ad a in numero di m.

Similmente la 3ª potenza di a^3b^2 ossia $(a^3b^2)^3$ indicherà il prodotto di

$$a^3b^2 \times a^3b^2 \times a^3b^2,$$

ossia:

$$aaa.bb \times aaa.bb \times aaa.bb = a.a.a.a.a.a.a.a.a. \times b.b.b.b.b.b. = a^9b^6;$$

donde si rileva che ognuno degli esponenti delle quantità a e b deve essere ripetuto 3 volte, ovvero moltiplicato per 3; e però

$$(a^3b^2)^3 = a^{3\times3} \times b^{2\times3} = a^9b^6.$$

Se il monomio in discorso avesse un coefficiente numerico, ad esempio 2, questo sarebbe tre volte fattore nel prodotto; od in altri termini, dovrebbe essere innalzato alla terza potenza, onde

$$(2a^3b^2)^3 = 2^3a^9b^6.$$

Alla stessa guisa

$$(3a^2b^3c)^3 = 3^3 \times a^{2\times3} \times b^{3\times3} \times c^3 = 27a^6b^9c^3;$$

ed in termini generali, $(ma^nb^p)^q = m^qa^{nq}b^{pq}$, m esprimendo un coefficiente astratto.

Per innalzare adunque una quantità monomia ad una potenza d' un grado qualsiasi, bisogna innalzare il coefficiente a questa potenza e moltiplicare l' esponente di cadun fattore per l' esponente della potenza stessa.

§ 60. Estrazione delle radici dei monomii algebrici. Esponenti frazionari.

Siccome la quantità, dalle cui ripetute moltiplicazioni nascono le successive potenze, dicesi la radice di queste (§ 15); così egli è chiaro che per estrarre una radice d'un grado qualsiasi da una quantità monomia, bisognerà estrarre la radice del coeffi-

ciente , e dividere l' esponente di caduna quantità per l' indice della radice; così

$$\sqrt[3]{a^3b^3}=a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{3}}=ab;$$

e
$$\sqrt[3]{64a^9b^3c^6}=4a^3bc^2,$$

ed in termini generali

$$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}.$$

Da questa regola chiaro emerge:

1° *Affinchè un monomio sia una potenza perfetta del grado della radice ad estrarsi, egli è necessario che il suo coefficiente sia una potenza perfetta di questo grado, e che gli esponenti delle quantità siano perfettamente divisibili per l' indice della radice.*

2° *Le quantità con un esponente frazionario denotano espressioni di radici, delle quali non è possibile assegnare esattamente il valore.*

Così, a cagion d'esempio, la radice seconda di a^3 non potendo aversi esattamente, perchè l' esponente 3 non si divide per 2, si segnerebbe con $a^{\frac{3}{2}}$: alla stessa guisa la radice terza di a^4 verrebbe indicata da $a^{\frac{4}{3}}$; ed in termini generali $\sqrt[m]{a^n}$, in cui n non è esattamente divisibile per m, si segnerebbe con

$a^{\frac{n}{m}}$. Ove poi si volesse effettuare l'operazione in modo approssimativo sulla quantità $a^{\frac{n}{m}}$ espressa in termini generali, si dovrebbe dapprima innalzare la quantità a alla n^{esima} potenza ed estrarre quindi la radice m^{esima} sino a quel grado di approssimazione che si desidererebbe.

Egli è evidente altresì dalla sola definizione della radice che, per innalzare una quantità sottoposta ad un radicale, alla potenza eguale all'indice della radice, basterà togliere il radicale e scrivere soltanto la quantità che trovavasi sotto di esso; così:

$$\sqrt[3]{(a^6)^3}=a^6,$$

e in termini generali

$$\sqrt[m]{(a^n)^m}=a^n;$$

la qual cosa d'altronde risulta eziandio dall'espressione $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, la quale innalzata alla potenza m, darebbe $a^{\frac{n \times m}{m}}=a^n$.

La radice mn^{esima} *d'una quantità è eguale alla radice* n^{esima} *della radice* m^{esima}, *cioè*:

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Ed in vero: sia $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=b,$

e s'innalzino i due membri alla n^{esima} potenza, si avrà:

$$\sqrt[m]{a} = b^n.$$

Innalzando di bel nuovo i due membri alla m^{esima} potenza, si avrà

$$a = (b^n)^m = b^{mn};$$

donde estraendo la radice mn^{esima} de' due membri, si avrà:

$$\sqrt[mn]{a} = b; \text{ ma } b = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

dunque $$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Siccome $(a^m)^n$, e $(a^n)^m$ sono entrambi uguali ad a^{mn}, così si può conchiudere che

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \text{ è uguale a } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Giusta questo principio

$$\sqrt[4]{a^8} = \sqrt{\sqrt{a^8}} = \sqrt{a^4} = a^2.$$

§ 61. Osservazioni intorno ai segni delle quantità esponenziali.

Sinora non si ebbe riguardo al segno da cui può essere affetto il monomio; ma se si osserva che, giusta il § 16, il quadrato d'un monomio è sempre positivo, qualunque possa essere il segno di questo monomio, e che ogni potenza di grado pari (*in termini generali* $2n$) può essere considerata siccome eguale alla n^{esima} potenza del quadrato, vale a dire $a^{2n}=(a^2)^n$, così si potrà inferirne che ogni potenza di grado pari d'una quantità, sia positiva sia negativa, sarà sempre positiva. Onde:

$$\pm(2a^2b^3c)^4=+16a^8b^{12}c^4.$$

Una potenza poi di grado impari $(2n+1)$, essendo il prodotto d'una potenza di grado $2n$ per la prima potenza, e giusta i §§ 6 e 7, il prodotto di un monomio positivo per un altro qualsiasi, risultando sempre affetto dal segno di quest'ultimo fattore, così ne seguirà che ogni potenza di grado impari d'un monomio, sarà sempre affetta dallo stesso segno del monomio.

Onde: $(+4a^2b)^3=+64a^6b^3$; $(-4a^2b)^3=-64a^6b^3$.

Da queste considerazioni emerge evidentemente:

1° Che ogni radice di grado pari d'un monomio positivo può essere affetta tanto dal segno $+$, quanto dal segno $-$

Così $\sqrt[4]{81a^4b^{12}}=\pm 3ab^3$.

2° Che ogni radice di grado impari d'un monomio deve essere affetta dal segno del monomio stesso.

Così:

$$\sqrt[3]{8+8a^3}=+2a$$

$$\sqrt[3]{-8a^3}=-2a$$

$$\sqrt[5]{-32a^{10}b^5}=-2a^2b.$$

3° *Che ogni radice di grado pari d'un monomio negativo è una radice impossibile*, giacchè non esiste alcuna quantità che, innalzata ad una potenza di grado pari, possa dare un risultato negativo. Così:

$$\sqrt[4]{-a},\ \sqrt[6]{-b},\ \sqrt[8]{c},$$

sono tutti simboli di operazioni impossibili, od in altri termini delle *quantità immaginarie* alla stessa guisa di $\sqrt{-a}$, come si disse nel § 16.

§ 62. Alcune nozioni sui radicali.

Allorchè la quantità monomia, di cui si domanda la radice d'un grado dato, non è potenza perfetta, s'indica l'operazione per mezzo del segno $\sqrt{\ }$, ovvero per mezzo del segno frazionario. Così la radice quinta di a^3b^2 si esprime per $\sqrt[5]{a^3b^2}$

oppure per $a^{\frac{3}{5}}\ b^{\frac{2}{5}}$.

Sovente si fa subire all'espressione radicale talune semplificazioni fondate sopra un principio analogo a quello del § 20,

pag. 178, cioè che *la radice* n^esima^ *d'un prodotto è uguale al prodotto delle radici* n^esima^ *dei differenti fattori*. Così

$$\sqrt[n]{abcd}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\sqrt[n]{d}.$$

In fatti, innalzando caduna di queste due espressioni alla n^{esima} potenza, si avrà per la prima:

$$\left(\sqrt[n]{abcd}\right)^n=abcd$$

e per la seconda:

$$\left(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c...}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\times\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\times\left(\sqrt[n]{c}\right)^n=abc...$$

Dunque $$\sqrt[n]{abcd}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\sqrt[n]{d}.$$

Ciò posto, abbiasi l'espressione

$$\sqrt[3]{54a^4b^3c^2},$$

di cui non si può estrarre la radice perfetta, non essendo 54 un cubo perfetto e gli esponenti di a, e di c, divisibili per 3. Si semplificano queste espressioni scomponendole nelle seguenti:

$$\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}=\sqrt[3]{27a^3b^3}\times\sqrt[3]{2ac^2}=3ab\sqrt[3]{2ac^2}.$$

Alla stessa guisa

$$\sqrt[3]{8a^2}=2\sqrt[3]{a^2};\ \sqrt[4]{48a^5b^8c^6}=2ab^2c\sqrt[4]{3ac^2}.$$

Cioè si *semplificano quelle espressioni coll'estrarre la radice delle potenze perfette, e lasciando sotto del radicale le quantità, di cui non si può ottenere la radice perfetta.*

Le quantità in tal caso poste innanzi del radicale sono chiamate *coefficienti* del radicale; e le espressioni delle quantità, di cui non si può perfettamente estrarre la radice, diconsi *radicali.*

Un'altra sorta di semplificazioni si può ottenere dal principio spiegato più sopra $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Ed in vero, abbiasi ad esempio l'espressione radicale

$$\sqrt[6]{4a^2}.$$

In virtù del principio suddetto, sarà

$$\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{4a^2}};$$

e siccome la quantità sottoposta al radicale è un quadrato perfetto, si avrà, estraendo la radice quadrata di $4a^2$,

$$\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt[3]{2a}.$$

Alla stessa guisa

$$\sqrt[4]{36a^2b^2}=\sqrt{\sqrt{36a^2b^2}}=\sqrt{6ab}.$$

In generale $\sqrt[mn]{a^n}$ è eguale a

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}=\sqrt[m]{a},$$

vale a dire che *allorquando l'indice del radicale è multiplo del numero* n *e che la quantità sotto il segno radicale è una potenza* n^{esima} *esatta, si può, senza cambiar il valore del radicale, dividere il suo indice per* n *ed estrarre la radice* n^{esima} *della quantità sotto il segno.*

Questa proposizione è l'inversa d'un'altra, non meno importante, la quale consiste in ciò che *si può moltiplicare l'indice del radicale per qualsiasi numero, purchè s'innalzi la quantità sotto il segno ad una potenza d'un grado segnato da questo stesso numero.*

Così $$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

Ed invero la quantità a è uguale $\sqrt[n]{a^n}$,

dunque $$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

Quest'ultimo principio è utile per ridurre ad uno stesso indice radicali d'indice diverso, locchè torna vantaggioso nelle operazioni algebriche.

Così i due radicali

$$\sqrt[3]{2a} \text{ e } \sqrt[4]{a}$$

si possono ridurre allo stesso indice, moltiplicando il primo indice per 4 (indice del secondo), ed innalzando in pari tempo la quantità $2a$ alla 4^a potenza; moltiplicando quindi l'indice del secondo

per 3 (indice del primo) ed innalzando infine la quantità a alla 3ª potenza. Queste operazioni giusta l'enunciato più sopra non mutano per nulla il valore de' radicali. Così sarà

$$\sqrt[6]{2a}=\sqrt[12]{2^2a^2} \text{ e } \sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^3}.$$

In generale adunque per *ridurre due o più radicali allo stesso indice basterà moltiplicare l'indice di cadun radicale pel prodotto di tutti gli altri indici ed innalzare caduna quantità sotto il segno ad una potenza d'un grado eguale al numero, per cui si è moltiplicato l'indice del radicale.*

L'operazione, che si vuol fare per ridurre i radicali ad uno stesso indice, come analoga a quella che si fa per ridurre le frazioni ad uno stesso denominatore, va pur soggetta alle stesse semplificazioni accennate al § 41 dell'Aritmetica.

Abbiasi per esempio da ridurre ad uno stesso indice i radicali

$$\sqrt[3]{a^2} \text{ e } \sqrt[9]{b^3},$$

siccome l'indice 3 del primo radicale è fattore di 9, indice del secondo, basterà che si moltiplichi per 3 l'indice del primo radicale e l'esponente 2 della quantità a posta sotto il segno del radicale; e il primo radicale si troverà ridotto allo stesso indice del secondo: onde

$$\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[9]{b^3}.$$

Addizione e sottrazione de' radicali. *Diconsi*

simili due radicali allorchè essi hanno lo stesso indice, e la quantità sotto il radicale è la stessa: così

$$3\sqrt[3]{b} \quad \text{e} \quad 2\sqrt[3]{b}$$

sono radicali simili; perchè in entrambe le espressioni trovasi comune $\sqrt[3]{b}$.

Ciò posto, per *addizionare due radicali simili, ovvero per sottrarre l'uno dall'altro, egli è d'uopo porre in fattore comune il radicale simile e fare la somma o la differenza dei coefficienti de' due radicali.* Così:

$$3\sqrt[3]{b}+2\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b}\,(3+2)=5\sqrt[3]{b}$$

$$3\sqrt[3]{b}-2\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b}(3-2)=\sqrt[3]{b}$$

$$3a\sqrt[4]{b}\pm 2c\sqrt[4]{b}=(3a\pm 2c)\sqrt[4]{b}.$$

Talvolta questi radicali a prima vista non appaiono simili; ma facilmente si chiariscono tali, facendo loro subire le semplificazioni di cui nel § precedente. Per esempio:

$$\sqrt[2]{48ab^2}+b\sqrt[2]{75a},\ \text{è}\ =4b\sqrt[2]{3a}+5b\sqrt[2]{3a}=9b\sqrt[2]{3a}:$$

$$3\sqrt[6]{4a^2}+2\sqrt[3]{2a}=3\sqrt[3]{2a}+2\sqrt[3]{2a}=5\sqrt[3]{2a}.$$

Moltiplicazione e divisione dei radicali.

Suppongasi dapprima che i due radicali da moltiplicare o dividere l'uno per l'altro, abbiano lo stesso indice. Sia $\sqrt[n]{a}$ da moltiplicare o da dividere per $\sqrt[n]{b}$; sarà $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

e
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Infatti se s'innalza $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ e $\sqrt[n]{ab}$ alla n^{esima} potenza, si troverà egualmente ab per risultato; dunque queste due espressioni sono eguali.

Così pure le espressioni $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ e $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ innalzate alla n^{esima} potenza daranno per risultato $\frac{a}{b}$; dunque queste due espressioni sono pure eguali.

Donde si conchiude che per *moltiplicare o dividere l'uno per l'altro due radicali dello stesso indice, basterà moltiplicare o dividere l'una per l'altra le due quantità sotto il segno e dare al prodotto o quoziente il segno del radicale comune. Se hannosi coefficienti, si comincia ad eseguire l'operazione su questi ultimi.*

Così $2a\sqrt[3]{b} \times (-3a\sqrt[3]{c}) = -6a^2\sqrt[3]{bc}$

$$\frac{6\sqrt[3]{a^3b^4}}{8\sqrt[3]{a^4b^3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{b^3}{a}}.$$

Se i radicali hanno indici diversi, si riducono anzitutto allo stesso indice e quindi si opera la moltiplicazione o la divisione nel modo detto precedentemente.

Vogliasi, ad esempio, il prodotto de'radicali $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[2]{2abc}$, questi, ridotti ad uno stesso indice, diventeranno

$$\sqrt[6]{a^4b^2}\ ;\ \sqrt[6]{2^3a^3b^3c^3}:$$

e il loro prodotto sarà espresso per il radicale $\sqrt[6]{8a^7b^5c^3}$,

ossia per $a\sqrt[6]{8ab^5c^3}$.

Si troverà parimenti, che il prodotto de' radicali

$$\sqrt[m]{a^q},\ \sqrt[n]{b^r},\ \sqrt[p]{c^s},$$

è espresso per il radicale $\sqrt[mnp]{a^{npq}b^{mrp}c^{mns}}$.

Nella stessa guisa

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} \text{ ossia } a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} \text{ è uguale a } \sqrt[mn]{a^{n+m}}.$$

e

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

$$\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[mp]{a^{np+mq}}$$

ossia

$$a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{np+mq}{mp}}$$

e
$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[p]{a^q}} = \sqrt[mp]{a^{np-mq}}.$$

ossia
$$\frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{q}{p}}} = a^{\frac{np-mq}{mp}}$$

Da queste ultime espressioni si deduce che per avere il prodotto od il quoziente di una quantità con esponente frazionario per la stessa quantità innalzata ad un altro esponente frazionario basterà dare, nel primo caso, alla quantità stessa un esponente uguale alla somma frazionaria de' due esponenti, e nel secondo caso un esponente uguale alla differenza delle due frazioni; con che si viene a confermare per gli esponenti frazionarii la stessa regola già data per gli esponenti interi.

Così pure: $a^{\frac{m}{n}} \times a^p$ sarà uguale a $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{pn}{n}} = a^{\frac{m+pn}{n}}$

e
$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^p} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{np}{n}}} = a^{\frac{m-pn}{n}}.$$

Parimenti $a^{\frac{m}{n}} \times a^{-p} = a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{np}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \times \frac{1}{a^{\frac{np}{n}}}$

$$= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{np}{n}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{np}{n}} \text{ e } \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-p}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{\frac{1}{a^p}} = a^{\frac{m}{n}} \times a^p = a^{\frac{m+np}{n}}$$

Formazione delle potenze ed estrazione delle radici dei radicali.

Suppongasi che si voglia innalzare la quantità $\sqrt[m]{a}$ alla potenza n^{esima}. Giusta la regola della moltiplicazione sarà

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}.....=\sqrt[m]{a^n}.$$

Onde si conchiude che *per innalzare un radicale ad una potenza data, bisogna innalzare a questa potenza la quantità sotto il segno e dare al risultato il segno radicale coll' indice primitivo. Se vi ha un coefficiente, s' innalza separatamente quest'ultimo alla potenza data.*

Così $(\sqrt[4]{4a^3})^2=\sqrt[4]{(4a^3)^2}=\sqrt[4]{16a^6}=2a\sqrt[4]{a^2}$

$$(3\sqrt[3]{2a})^5=3^5\sqrt[3]{(2a)^5}=243\sqrt[3]{32a^5}=486a\sqrt[3]{4a^2}.$$

Allorchè l'indice del radicale è un multiplo dell'esponente della potenza che si vuol formare, si può ottenere una semplificazione. Così $\sqrt[4]{2a}$, innalzata al quadrato, sarebbe uguale, giusta quanto si è detto più sopra, a $\left(\sqrt{\sqrt{2a}}\right)^2=\sqrt{2a}.$

Così pure $\left(\sqrt[6]{36}\right)^2=\left(\sqrt[3]{\sqrt[2]{36}}\right)^2=\sqrt[3]{36},$

cioè *se l'indice del radicale è divisibile per l'esponente della*

potenza, si può operare la divisione fra l'indice ed il numero della potenza, lasciando intatta la quantità sotto il segno.

Quanto alle estrazioni delle radici, ricorrendo al principio del § 60, cioè che $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, *bisognerà moltiplicare l'indice del radicale per l'indice della radice ad estrarsi e lasciare intatta la quantità sotto il segno.*

Cosi $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3c}}=\sqrt[12]{3c}$; $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5c}}=\sqrt[6]{5c}$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{8a^3}}=\sqrt[4]{2a}$$

Cosi pure $\sqrt[2]{\sqrt[5]{9a^2}}=\sqrt[5]{\sqrt[2]{9a^2}}=\sqrt[5]{3a}$.

CAPO IX.

Dei logaritmi.

ARTICOLO I.

Definizioni e proprietà generali dei logaritmi.

Come tutti i numeri assoluti si possano rappresentare con una quantità costante innalzata ad un conveniente esponente. Vantaggi che si trae da questa trasformazione. — Definizione del logaritmo di un numero e della base d'un sistema di logaritmi. — *Il logaritmo d'un prodotto è uguale alla somma de' logaritmi dei singoli fattori.* — *Il logaritmo del quoziente è uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore.* — *Il logaritmo d'una potenza è uguale al logaritmo della quantità semplice, moltiplicato per l'esponente della potenza.* — *Il logaritmo della radice è uguale al logaritmo della quantità sotto-radicale diviso per l'indice della radice.* — Utilità dei logaritmi.

---

§ 63. Come tutti i numeri assoluti si possano rappresentare con una quantità costante innalzata ad un conveniente esponente. Vantaggi che si trae da questa trasformazione.

Si è veduto precedentemente come in termini generali,

1° $a^m \times a^n$ sia uguale ad a^{m+n};

2° $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3° $(a^m)^n = a^{m \times n}$;

4° $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

cioè, operando su d'una stessa quantità: 1° l'esponente del prodotto è uguale alla somma degli esponenti de' fattori; 2° l'esponente del quoziente è uguale all'esponente del dividendo, meno quello del divisore; 3° l'esponente della potenza è uguale al prodotto degli esponenti; 4° si estrae la radice dividendo l'esponente della potenza per l'indice della radice.

Ciò posto, se si potessero rappresentare tutti i numeri con una quantità costante innalzata ad un conveniente esponente, appare chiaro che si effettuerebbero le moltiplicazioni mercè somme; le divisioni mediante sottrazioni; gl'innalzamenti a potenze mercè moltiplicazioni, e le estrazioni di radici mediante divisioni dei corrispondenti esponenti.

Ora tutte le quantità numeriche possono venire difatto rappresentate da un medesimo numero con differenti esponenti. Prendasi ad esempio il numero 10. Se si danno successivamente al 10 gli esponenti 0, 1, 2, 3, 4, ecc., si avranno le quantità corrispondenti

$10^0=1$

$10^1=10$

$10^2=100$

$10^3=1000$; e così di seguito.

Esaminando gli esponenti suddetti e le quantità 1, 10, 100, 1000, ecc. che risultano dai successivi innalzamenti a potenza del numero 10, egli è facile dedurre che pur anche le quantità 1, 2, 3, 4, 5 ecc. sino al 10 potranno essere rappresentate dal 10 con un qualche esponente, cioè che vi sarà pur un esponente da darsi al 10, in modo che ne risultino i numeri 2, 3, 4, 5, ecc. E siccome per aver l'unità è necessario dare al 10 l'esponente zero e per avere il 10 convien assegnare l'esponente uno, così se ne conchiuderà che gli esponenti da darsi al 10 per aver i numeri dall'1 al 10 dovranno essere maggiori di zero e minori dell'unità, cioè frazioni. Si ragioni in modo analogo per i numeri maggiori di $10^1=10$ e minori di $10^2=100$; se ne conchiuderà che, per aver un numero compreso fra quei due, converrà dare al 10 un esponente maggiore di 1 e minore di 2; per un numero maggiore di $10^2=100$ e minore di $10^3=1000$ si dovrà dare al 10 un esponente maggiore di 2 e minore di 3 e così di seguito, cioè che per aver numeri di una sola cifra ossia fra 1 e 10, con-

vien dare per esponente al 10 una frazione; per aver numeri di 2 cifre, cioè fra il 10 e il 100, convien dare per esponente 1 più una frazione; per aver numeri di 3 cifre, cioè fra 100 e 1000, convien dare per esponente 2 più una frazione e via discorrendo.

Se a vece di esponenti positivi venissero attribuiti al 10 degli esponenti negativi (siccome in termini generali $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$), risulterebbero, dai successivi innalzamenti a potenze, delle quantità minori dell'unità, cioè delle frazioni.

Ricapitolando adunque si dirà che col dare al 10 un conveniente esponente si potranno rappresentare tutti i numeri indistintamente maggiori o minori dell'unità, e per conseguenza le operazioni, da effettuarsi sopra i numeri, si ridurranno ad operazioni più semplici, più brevi, eseguibili soltanto sugli esponenti stessi.

A render maggiormente chiara la cosa, suppongasi che si abbia da moltiplicare il numero 10473 per 11354.

Il primo numero si potrà rappresentare per 10^a ed il secondo per 10^b (a e b essendo i convenienti esponenti da darsi al 10 per ottenere i due numeri in discorso), onde il prodotto di quelli sarà eguale a $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$.

Ora, se si avesse costrutta una tavola ove fossero segnati tutti i convenienti esponenti da darsi al 10 per ottenere tutti i numeri, egli è chiaro che basterebbe, nella supposizione anzidetta, cercare nella tavola il numero che è corrispondente dell'esponente $a+b$ ossia della potenza 10^{a+b} per avere il prodotto di 10473 per 11354.

Applicando lo stesso principio alla divisione, agl'innalzamenti a potenza ed all'estrazione di radici, si otterrebbero i risultati delle corrispondenti operazioni mercè sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni dei corrispondenti esponenti.

Onde scorgesi, di qual vantaggio possa riescire una tavola siffattamente costrutta.

Un analogo ragionamento è applicabile ad un'altra quantità pur costante e positiva diversa dal 10, mediante l'elevazione della

quale alle varie convenienti potenze pur si potrebbero rappresentare tutti i numeri. Così se a rappresenta la quantità costante e x l'esponente da darsi a questa per ottenere un numero y qualsiasi, si avrà $a^x = y$, in cui a ritiene sempre uno stesso valore ed x rappresenta una quantità, la quale varia col variare di y.

Se a è $>$ di 1 e se si suppone che la quantità x sia successivamente uguale a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.... ne risulterà $y = a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 \ldots$ Dunque *tutti i valori di y maggiori dell'unità sono originati da potenze di a, i cui esponenti sono positivi intieri o frazionarii;* ed il valore di x sarà tanto più grande, quanto maggiore sarà la quantità y.

Se x è uguale a $0, -1, -2, -3, -4, -5$ ecc., ne risulterà $y = \frac{1}{a^0}, \frac{1}{a^1}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}, \ldots$ Dunque *tutti i valori di y minori dell'unità sono originati dalle potenze di a, i cui esponenti sono negativi*; ed il valore di x sarà tanto più grande, indipendentemente dal segno, quanto più il valore di y si farà piccolo, od in altri termini, quanto più si approssimerà allo zero, onde per un valore di $y=0$, x rappresenterà l'infinito negativo.

Supponghasi ora $a <$ di 1 e uguale ad una frazione, ad esempio $\frac{1}{b}$ e si faccia $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots$ si avrà $y = \left(\frac{1}{b}\right)^0$ ossia 1 $\frac{1}{b^1}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^4}, \ldots$ e se $x = 0, -1, -2, -3, -4, -\ldots$ si otterrà $y = \left(\frac{1}{b}\right)^0$ ossia $1, b, b^2, b^3, b^4 \ldots$ vale a dire che *nell' ipotesi di a < di 1 tutti i numeri sono generati da diverse potenze di a nell'ordine inverso dell'ipotesi di a > di* 1. Si noti che tanto nel caso di $a >$ di 1 quanto in quello di $a <$ di 1, il valore di a^x non diverrà mai negativo, qualunque possa essere il valore di x, positivo o negativo.

Onde si perviene a questa conseguenza che si era già dedotta

pel caso speciale di $a=10$, che l'espressione a^x è atta a rappresentare tutti i numeri positivi, od in altri termini *tutti i numeri assoluti cioè positivi possono essere generati da un numero pure assoluto ma costante, che s'innalza ad una potenza conveniente.* Bisogna però supporre sempre a differente dall' unità, giacchè tutte le potenze di 1 sono uguali a 1.

§ 64. Definizione del logaritmo di un numero e della base d'un sistema di logaritmi.

Ora *l'esponente della potenza, alla quale bisogna innalzare un certo numero costante per produrre un altro numero, venne chiamato logaritmo di quest'ultimo numero, e la quantità costante fu detta base del sistema di logaritmi.* Così nell'espressione $a^x=y$ l'esponente x, a cui conviene innalzare la base a per ottenere y, è il logaritmo di y, e si esprime per $x=\log. y$. Il logaritmo di y adunque altro non è che l'esponente da darsi alla base a per avere y. Così se 10 è, ad esempio, la quantità costante della base:

Il numero	1	sarà il logaritmo di	$10^1=10$
Id.	2	idem	$10^2=100$
id.	3	idem	$10^3=1000$.

e via dicendo.

Se dopo fissato una prima volta il valore della base a, si danno successivamente ad y tutti i valori possibili e per ognuno di questi si ricava il valore corrispondente di x, si verrà così a formare una tavola ovvero sistema di logaritmi; epperò i sistemi di logaritmi possono variare all'infinito, poichè per ogni valore particolare che si darà alla base (salvo l'unità) si formerà un nuovo sistema, ed il logaritmo d'uno stesso numero sarà diverso nei differenti sistemi. Ma in qualsiasi sistema il logaritmo della base è sempre eguale ad 1 ed il logaritmo di 1 è 0. Difatti qua-

lunque sia il numero che si prenda per la base a, sarà $a^1 = a$, e $a^0 = 1$, onde log. $a = 1$ e log. $1 = 0$; così pure:

1 sarà il logaritmo di a^1

2 idem a^2

3 idem a^3.

e via discorrendo

$$e - 1 \text{ il logaritmo di } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$-2 \quad \text{id.} \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$-3 \quad \text{id.} \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \text{ ecc.}$$

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, saranno rispettivamente i logaritmi di

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}; \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}; \quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}; \text{ ecc.}$$

e $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{4}$ i logaritmi di

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{a}}, \; \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, \; \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}.$$

Donde si rileva che tanto i numeri positivi quanto i negativi sono logaritmi di numeri positivi, e quindi che in ogni sistema i numeri negativi non hanno logaritmi, od in altri termini, che i *logaritmi de' numeri negativi sono quantità immaginarie.*

Ricapitolando il sin qui detto risulta:

1° *In ogni sistema il logaritmo dell'unità è zero, quello della base è l'unità ed i numeri negativi non hanno logaritmi.*

2° *Se la base è maggiore dell'unità i logaritmi de' numeri maggiori di 1 sono positivi; quelli de' numeri minori di 1 sono negativi, ed il logaritmo di zero è l'infinito negativo.*

3° *Se la base è minore di 1, i logaritmi dei numeri maggiori di 1 sono negativi, quelli dei numeri minori di 1 sono positivi, ed il logaritmo di zero è l'infinito positivo.*

Vedansi ora le proprietà de' logaritmi ed il frutto che se ne trae specialmente per l'abbreviazione de' calcoli.

§ 65. Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma de' logaritmi dei singoli fattori.

Il logaritmo di un numero essendo l'esponente che conviene dare alla base per ottenere quel numero stesso, così l'espressione $a^x = y$, ove $x = \log. y$ potrà mutarsi in quest'altra

$a^{\log. y} = y$: allo stesso modo per un altro numero y' si avrà $a^{\log. y'} = y'$.

Facendo il prodotto di queste equazioni si avrà

$$a^{\log. y + \log. y'} = yy'.$$

E se per un momento si suppone $\log. y + \log. y' = m$ sarà $a^m = yy'$.

Ora l'esponente essendo sempre il logaritmo della potenza, sarà m ossia $\log. y + \log. y' = \log. yy'$: allo stesso modo si avrebbe $\log. y + \log. y' + \log. y'' = \log. y\,y'\,y''$; vale a dire che *il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi de' singoli fattori.*

§ 66. Il logaritmo del quoziente è uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore.

Se si divide l'espressione $a^{\log. y} = y$ per $a^{\log. y'} = y'$ si avrà $a^{\log. y - \log. y'} = \frac{y}{y'}$, e per conseguenza $\log. y - \log. y'$ $= \log. \frac{y}{y'}$, vale a dire che per *avere il logaritmo del quoziente della divisione di un numero per un altro, convien prendere la differenza tra il logaritmo del dividendo e quello del divisore.*

§ 67. Il logaritmo d'una potenza è uguale al logaritmo della quantità semplice moltiplicato per l'esponente della potenza.

Se nelle due espressioni $a^{\log. y} = y$, e $a^{\log. y'} = y'$, y è uguale ad y', si avrà $a^{\log. y + \log. y} = yy'$, ossia $a^{2 \log. y} = y^2$. Quindi $2 \log. y = \log. y^2$.

Alla stessa guisa si otterrebbe $3 \log. y = \log. y^3$ e in generale $n \log. y = \log. y^n$.

Locchè significa che *il logaritmo d'una potenza d'un numero è uguale al prodotto del logaritmo di questo numero per l'esponente della potenza.*

§ 68. Il logaritmo della radice è uguale al logaritmo della quantità sotto-radicale diviso per l'indice della radice.

Se gli esponenti fossero frazionarii, si avrebbe nello stesso modo $\frac{1}{2}$ log. $y =$ log. $y^{\frac{1}{2}}$, ma siccome $y^{\frac{1}{2}}$ è uguale $\sqrt{y}$

così sarà $\frac{1}{2}$ log. $y =$ log. $\sqrt{y}$, e $\frac{1}{3}$ log. $y =$ log. $\sqrt[3]{y}$

$\frac{1}{4}$ log. $y =$ log. $\sqrt[4]{y}$ e in termini generali

$$\frac{1}{n} \text{ log. } y = \text{log. } \sqrt[n]{y}.$$

Si potrebbe pur rinvenire quest'ultima proprietà nel seguente modo:

Se $q = \sqrt[m]{p}$ sarebbe $p = q^m$ e log. $p = m$ log. q,

onde $\quad$ log. $q = \frac{\text{log. } p}{m}$ ossia log. $\sqrt[m]{p} = \frac{\text{log. } p}{m}$.

La quale ultima proprietà significa:

Che il logaritmo della radice d'un indice qualunque è uguale al logaritmo della quantità sotto-radicale, diviso per l'indice della radice.

§ 69. Utilità dei logaritmi.

Le proprietà dei logaritmi, esposte ne' quattro paragrafi precedenti, dimostrano l'utilità di una tavola, in cui accanto a ciascun numero vi sia il corrispondente logaritmo, od esponente da darsi ad una base determinata per ottenere quello stesso numero. Ed in vero dalle suddette proprietà risulta che quando si abbia una tavola siffatta:

1° Per trovare il prodotto di più fattori, basterà cercare nella tavola il logaritmo di ciascun fattore, fare la somma di tutti i logaritmi trovati, la quale esprimerà il logaritmo del prodotto: poi cercare di nuovo nella tavola il numero a cui corrisponde questo nuovo logaritmo: questo numero sarà il prodotto cercato, avvegnachè, nell'espressione $a^{\log. y + \log. y'} = yy'$, $\log. y + \log. y'$ altro non è che l'esponente conveniente da darsi alla base a per ottenere il prodotto yy'.

2° Il quoziente di due numeri si avrà sottraendo il logaritmo del divisore da quello del dividendo, e cercando quindi nella tavola il numero avente per logaritmo la differenza risultante.

3° Ad avere una potenza qualunque di un numero, basterà fare il prodotto del logaritmo di questo numero per l'esponente della potenza, quindi cercare nella tavola il numero che ha per logaritmo questo stesso prodotto: quest'ultimo numero sarà la potenza proposta.

4° Per determinare la radice di un indice qualunque di un numero, basterà dividere il logaritmo di questo numero per l'indice della radice, ed avuto il quoziente, cercare nella tavola dei logaritmi quel numero che ha per logaritmo questo quoziente medesimo.

5° Per ultimo si potrà risolvere facilmente un'equazione esponenziale, ossia della forma $m^x = b$, poichè se si suppone per un istante la quantità b eguale alla base innalzata ad un

conveniente esponente, ad esempio c, si avrà $c=\log. b$, ma essendo $b=m,^x$ si avrà altresì $\log. b=\log. m^x=x \log. m$ onde $x=\frac{\log. b}{\log. m}$.

Apparisce dalle cose precedenti che, col mezzo di una tavola di logaritmi, la moltiplicazione e la divisione de' numeri si riducono ad una semplice addizione o sottrazione; che l'innalzamento a potenza e l'estrazione di radice de' numeri, che sono per lo più operazioni molto laboriose, segnatamente quando i numeri sono grandi, si riducono ad una semplice moltiplicazione o divisione, le quali proprietà costituiscono l'insigne utilità de' logaritmi nel calcolo, e possono appartenere a qualunque sistema di logaritmi, perchè sono indipendenti dal valore della base del sistema.

ARTICOLO II.

Delle Tavole di logaritmi.

Brevi cenni sulla formazione di tavole di logaritmi. — Sistema de' logaritmi ordinarii, e vantaggi che ne derivano. — Come si possano, dati i logaritmi di un determinato sistema, computare quelli per un altro sistema qualsiasi. Che cosa s'intenda per complemento aritmetico di un logaritmo. — Tavole di Callet. Disposizione de' numeri e de' loro logaritmi ordinarii. — Trovare il logaritmo ordinario di un numero dato, intero o decimale. — Trovare il numero di cui è dato il logaritmo ordinario. — Uso delle tavole di Lalande.

---

§ 70. Brevi cenni sulla formazione di tavole di logaritmi.

Si sono formate delle tavole di logaritmi Esse contengono solamente i logaritmi de' numeri interi, perchè 1° se si hanno i logaritmi de' numeri interi, è facile determinare il logaritmo di un numero della forma $\frac{a}{b}$ (§ 66), esprimendo a e b numeri interi; 2° mediante tali tavole si può trovare agevolmente, come si vedrà fra breve, un valore sufficientemente prossimo al vero, per i calcoli che ordinariamente occorre di fare, del numero corrispondente ad un dato logaritmo, il quale non sia uguale ad alcuno di quelli contenuti nelle medesime. Il metodo, che si è tenuto per calcolarle, non può trovar luogo in questi elementi. Basti qui dimostrare la possibilità della loro formazione, indicando uno de'varii metodi che per questo oggetto si possono seguire.

Se nell'equazione $y=a^x$ si danno a x i successivi valori 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ecc., ne nasceranno i valori corrispondenti di y, cioè a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8 ecc.

In questo modo si verrà a formare una tavola, composta di due successioni di numeri, l'una di logaritmi e l'altra de' numeri corrispondenti, cioè delle varie potenze della base. I logaritmi formano una progressione per differenza, corrispondente, termine per termine, alla progressione de' numeri per quoziente. Se non che la tavola così fatta non verrà a contenere che i logaritmi espressi dalla successione de' numeri interi 0, 1, 2, 3, 4, 5 ecc. e corrispondenti alle sole successive potenze della base a.

Epperò, gioverà dare alla stessa tavola una maggiore estensione, determinando i logaritmi de'numeri intermedi ai termini della progressione per quoziente, affinchè per la vicinanza dei numeri, su cui si vuol operare, altri possa giovarsi di quella per tutti i casi che possono occorrere nella pratica del calcolo.

Se fra due termini consecutivi della progressione per quoziente, come per esempio tra a^2 e a^3, s'inserisce un medio proporzionale, questo sarà $\sqrt{a^2 \times a^3} = \sqrt{a^5}$; e se tra i logaritmi 2 e 3, corrispondenti ai numeri a^2 e a^3, si prende un medio equidistante, questo medio sarà $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$; ora, è facile provare che $\frac{5}{2}$ è appunto il logaritmo di $\sqrt{a^5}$. Di fatto, essendo log. $a^2 = 2$, e log. $a^3 = 3$, sarà

log. $a^2 \times a^3$, ossia log. $a^5 = 5$, e log. $\sqrt{a^5} = \frac{1}{2}$ log. $a^5 = \frac{5}{2}$.

Dal che si conchiude che, se nella progressione per quoziente $\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 \ldots$ s'inserisce un numero determinato di medii proporzionali tra a^0 e a^1, tra a^1 e a^2, tra a^2 e a^3, e così di seguito, e uno stesso numero di medii equidistanti s'inserisce nella progressione per differenza $\div 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots$ tra 0 e 1, tra 1 e 2, 2 e 3 e via dicendo; ciascuno di questi medii sarà il

logaritmo del medio proporzionale corrispondente nella nuova progressione per quoziente.

Determinato pertanto il numero che debbe essere base del sistema de' logaritmi che si vuol formare, si può costrurre una tavola che contenga i logaritmi dei numeri interi, dall'uno sino ad un numero determinato k, operando nel modo seguente:

S'innalzi la base alle successive potenze notate dagli esponenti 0, 1, 2, 3, 4, 5... $m-1$, m, in modo che il numero k si trovi tra le consecutive potenze della base notata dagli esponenti $m-1$ e m.

S'inserisca tra le consecutive potenze della base uno stesso numero, grandissimo però, di medii proporzionali; un egual numero di medii equidistanti s'inserisca tra i consecutivi esponenti delle dette potenze; si avranno in questo modo due successioni di numeri; la prima formerà una progressione per quoziente, la quale avrà l'uno per primo termine, e gli altri termini tutti i medii proporzionali uniti colle potenze successive della base: la seconda formerà una progressione per differenza, la quale avrà zero per primo termine, e gli altri termini tutti medii equidistanti uniti cogli esponenti delle successive potenze della stessa base.

Ora, nella prima progressione si troveranno termini tali, che se non saranno precisamente eguali ai numeri 1, 2, 3, 4 ecc. differiranno pure di quantità trascurabile, poichè riserrando i termini della progressione, la loro differenza si renderà minore di qualunque quantità data: e questi medii proporzionali, che equivarranno prossimamente ai numeri 2, 3, 4, 5, 6 ecc., avranno per logaritmi i medii equidistanti corrispondenti in numero d'ordine nella progressione per differenza.

Siffatto modo però di formare tavole di logaritmi è oltremodo lungo e pressochè impraticabile. Di fatto, se si rappresenta per n il numero de' medii proporzionali da inserirsi fra due consecutive potenze della base, come a^m, a^{m+1}, e il numero de'medii equidistanti da inserirsi tra i due logaritmi m e $m+1$ di esse

due potenze; se si esprime per q il rapporto di due medii proporzionali, e per d la differenza di due medii equidistanti, si

avrà $$q=\sqrt[n+1]{\frac{a^{m+1}}{a^{m}}}=\sqrt[n+1]{a};$$

e $d=\frac{m+1-m}{n+1}=\frac{1}{n+1}$, dove è da notare che per poco grande sia n, non rimarrà così facile l'operazione da fare per avere il valore di q.

Un altro metodo si potrebbe usare, per cui si eviterebbe l'inconveniente di aver ad inserire con fatica indicibile un numero sterminato di medii tra i due termini delle due progressioni fondamentali.

Questo metodo consiste nell'operare più inserzioni successive di medii, cioè nell'inserire dapprima un medio fra i termini delle progressioni primitive, poi di nuovo un medio fra i termini delle nuove progressioni che ne risulteranno e così di seguito; avvertendo d'inserire i medii solo fra i numeri i quali comprendono tra loro numeri interi, o meglio, solamente fra quelli che comprendono fra loro numeri primi, giacchè trovati i logaritmi di questi, si possono facilmente avere quelli degli altri numeri interi (§ 65). Il medio geometrico fra due numeri, A e B, è dato dalla formola $\sqrt{A\times B}$. Il medio aritmetico fra due numeri a e b è uguale ad $\frac{a+b}{2}$.

Operando, come si è detto, nelle successive serie di numeri dedotte dalle progressioni si avranno valori, prossimi ai veri, dei logaritmi de' varii numeri primi, e sarà facile accorgersi che per ciascun di tali valori l'errore, ossia la differenza fra esso ed il valor vero, è sempre, fatta astrazione dal segno, minore della differenza fra il medesimo e quello contenuto nella serie precedente. Si potranno dunque agevolmente calcolare i detti logaritmi coll'approssimazione che si desidera.

Pongasi che il numero n, di cui si vuole il logaritmo, sia compreso tra i numeri a^2 e a^3, che hanno i logaritmi 2 e 3: prendasi tra a^2 e a^3, il medio proporzionale $\sqrt{a^5}$, e tra 2 e 3 il medio equidistante $\frac{5}{2}$; il numero n si troverà compreso, o tra a^2 e $\sqrt{a^5}$, ovvero tra $\sqrt{a^5}$ e a^3, ed il suo logaritmo sarà pure contenuto, o tra 2 e $\frac{5}{2}$, ovvero tra $\frac{5}{2}$ e 3. Prendasi di nuovo, tanto nell'uno come nell'altro caso, un medio proporzionale tra i due numeri, entro cui è compreso il numero n, ed un medio equidistante tra i numeri, entro cui trovasi compreso il logaritmo di n: questo nuovo medio equidistante sarà il logaritmo del nuovo medio proporzionale. Così, proseguendo ad operare sempre cercando un medio proporzionale tra due medii già calcolati, l'uno maggiore e l'altro minore di n, si terminerà l'operazione, quando si arriverà ad un medio proporzionale, il quale non differisca da n che di una tale unità frazionaria di quell'ordine, che si è fissato per limite di approssimazione.

Si calcolerà nello stesso tempo per ogni medio proporzionale il logaritmo, prendendo un medio equidistante tra i logaritmi de' due numeri di cui si è preso il medio proporzionale: e quel medio equidistante, il quale corrisponderà all'ultimo medio proporzionale che equivale prossimamente a n, si prenderà per logaritmo di questo numero. Tutta la difficoltà di quest'operazione, quantunque ristucchevole per la lunghezza del calcolo, si riduce all'estrazione della radice quadrata.

§ 71. Sistema de' logaritmi ordinari, e vantaggi che ne derivano.

Le tavole di logaritmi che comunemente si usano sono quelle calcolate sulla base del numero 10. I logaritmi che esse contengono diconsi perciò *logaritmi ordinarii*, o logaritmi di Briggs, dal nome del primo autore d'una tavola di questo genere.

Se nell'equazione $y=10^x$ si fa successivamente

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \text{ecc.},$$

ne nasceranno i seguenti valori:

$$y=1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ 100000,\ 1000000.$$

Esaminando queste due successioni di numeri, si viene a conoscere che i logaritmi dei numeri, compresi tra 1 e 10, cadono tra 0 e 1, e che i logaritmi dei numeri, compresi tra 10 e 100, cadono tra 1 e 2; i logaritmi de' numeri, compresi tra 100 e 1000, cadono tra 2 e 3; cosicchè tutti i logaritmi sono composti d'un numero intero e d'una frazione, salvo quelli che corrispondono ai numeri compresi tra 1 e 10, i quali sono sempre espressi per frazioni; e quelli che corrispondono alle potenze intere della base 10, i quali sono sempre espressi per numeri interi.

La parte intera d'un logaritmo dicesi *caratteristica*, perchè questa serve a far conoscere entro quali ordini di unità è contenuto il numero che corrisponde a questo logaritmo, e nel sistema de' logaritmi ordinarii egli è chiaro vedere che la caratteristica del logaritmo di un numero intero è sempre minore di un' unità del numero delle cifre di esso numero.

Così, un logaritmo che ha 4 per caratteristica, come sarebbe il logaritmo 4, 8583687, corrisponde ad un numero compreso tra 10000 e 100000; e reciprocamente il logaritmo di un numero composto di cinque cifre, come sarebbe 72172, ha 4 per caratteristica.

Per la ragione già detta precedentemente tutti i numeri, che non sono numeri primi, nascono dalla moltiplicazione di numeri primi tra di loro, o di potenze di numeri primi. Epperò, trovati coi noti metodi i logaritmi de' soli numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ecc. si avranno facilmente i logaritmi degli altri numeri.

Sia da cercare il logaritmo di 15; 15 essendo il prodotto dei numeri primi 3 e 5, si avrà (§ 65) log. 15=log. 3+log. 5. Ancora il logaritmo di 32 sarà uguale al logaritmo di 2^5, ossia uguale a 5 log. 2; e log. $81=3^4=4$ log. 3; e log. 75=log. $(3\times 25)=$ log. 3 + 2 log. 5; e log. 216=log. $(8\times 27)=3$ log. $(2^3\times 3^3)=3$ log. 2+3 log. 3.

Conosciuto il logaritmo d'un numero qualunque, si ha immediatamente il logaritmo di ciascun de' prodotti di esso numero per 10, per $10^2=100$, per $10^3=1000$, per $10^4=10000$... per 10^m; bastando perciò di aggiungere alla caratteristica i numeri 1, ovvero 2, ovvero 3.... ovvero m.

Di fatti log. $(n.\times 10)=$log. $n+$log. $10=$log. + 1;

log. $(n\times 100)=$log. $n+$log. $100=$log. $n+2$;

. . . .

log. $(n\times 10^m)=$log. $n+$log. $10^m=$log. $n+m$;

così log. 20=log. 2 + 1;

log. 200=log. 2+2,

log. 2000=log. 2+3;

log. 3750000=log. 375+4.

Reciprocamente conosciuto il logaritmo d'un numero, si hanno immediatamente i logaritmi de'numeri 10, 100, 1000, ecc. volte minore di esso numero, togliendo dalla caratteristica di

questo numero i numeri 1, ovvero 2, ovvero 3.... ovvero m. La ragione è che

$$\log.\frac{n}{10}=\log.\ n-\log.\ 10=\log.\ n-1;$$

$$\log.\frac{n}{100}=\log.\ n-\log.\ 100=\log.\ n-2;$$

. . . .

$$\log.\frac{n}{10^m}=\log.\ n-\log.\ 10^m=\log.\ n-m.$$

Nel sistema volgare nissun numero intero, che non sia potenza perfetta della base 10, ha logaritmo esatto, nè intero, nè frazionario. Ed in vero se nell'equazione $y=10^x$, si suppone intero il numero espresso per x, il valore che nascerà per y non può essere che una potenza perfetta del 10: che se si pone $x=\frac{p}{q}$, essendo p e q numeri primi tra di loro, si avrà

$y=10^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{10^p}$; nè $\sqrt[q]{10^p}$ potrà mai esprimere un numero intero.

I logaritmi de' numeri, che non sono potenze della base 10, non si possono adunque ottenere che per approssimazione.

Le tavole dei logaritmi contengono solamente i numeri interi coi loro logaritmi corrispondenti, perciocchè, se il numero è frazionario, si troverà ugualmente il suo logaritmo, sottraendo dal logaritmo del dividendo il logaritmo del divisore (§ 66).

Per esempio, $\log.\ \frac{1745}{37}=\log.\ 1745-\log.\ 37$ e $\log.\left(12+\frac{3}{5}\right)=\log.\frac{63}{5}=\log.\ 63-\log.\ 5$. Nè diversamente si ha $\log.\ \frac{7}{9}=\log.\ 7-\log.\ 9$, e $\log.\frac{323}{497}=\log.\ 323-\log.\ 497$.

I logaritmi dei numeri decimali non differiscono che nella sola caratteristica dei logaritmi de'numeri interi, a cui si riducono i decimali sopprimendo in essi la virgola; ma la caratteristica è quella stessa che conviene alla parte intera del numero decimale proposto.

Pongasi che la frazione decimale del logaritmo del numero 374568 sia espressa per a; la sua caratteristica sarà 5, e si avrà log. $374568=5,a$; quindi

$$\text{Log. } 37456,8=\text{log.}\frac{374568}{10}=5,a-1=4,a$$

$$\text{Log } 3745,68=\text{log.}\frac{374568}{100}=5,a-2=3,a$$

$$\text{Log. } 374,568=\text{log.}\frac{374568}{1000}=5,a-3=2,a$$

$$\text{Log. } 37,4568=\text{log}\frac{374568}{10000}=5,a-4=1,a$$

$$\text{Log. } 3,74568=\text{log.}\frac{374568}{100000}=5,a-5=0,a.$$

Donde si scorge che in tutti questi logaritmi la parte decimale si mantiene sempre la stessa, variando soltanto la caratteristica.

Ad avere il logaritmo d'una frazione decimale periodica, si ridurrà prima questa frazione in frazione ordinaria, poi dal logaritmo del numeratore si dovrà togliere il logaritmo del denominatore.

$$\text{Così log. } 0,2424...=\text{log.}\frac{24}{99}=\text{log. } 24-\text{log. } 99;$$

$$\text{e log. } 0,46262...=\text{log.}\frac{4+\frac{62}{99}}{10}=\text{log.}\frac{458}{990}=\text{log. } 458-\text{log. } 990.$$

Dal sin qui detto si può inferire, che i logaritmi delle fra-

zioni nel sistema volgare sono negativi; e ciò si deduce ancora immediatamente dall'equazione $y=10^x$. Di fatto, se si danno ad x i valori $-1, -2, -3, -4 \ldots - m$, si avranno per y i valori

$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000} \ldots \frac{1}{10^m}$ cioè delle frazioni.

E in tal caso i valori di y andranno continuamente diminuendo a misura che crescono i valori negativi di x, cosicchè il valore di y può diventare minore d'ogni quantità data, senza che però mai si possa assegnare a x un valore tale che renda $y=0$. In questo senso vuolsi interpretare l'espressione log. $0=-\infty$, ossia, che il logaritmo di zero è l'infinito negativo.

La maggiore facilità di calcolare i logaritmi nella base 10 che non in qualunque altro sistema, la circostanza che in tal sistema la caratteristica d'un logaritmo è uguale al numero delle cifre componenti il numero meno uno, e la circostanza infine che i logaritmi de' numeri decimali non differiscono che nella sola caratteristica dai logaritmi de' numeri interi, le quali cose arrecano un sommo vantaggio nell' applicazione de' logaritmi al calcolo, hanno dato il vanto su tutti gli altri al sistema de' logaritmi ordinari.

§ 72. Come si possano, dati i logaritmi di un determinato sistema, computare quelli per un altro sistema qualsiasi.

Già prima si è veduto (§ 64) che i sistemi de' logaritmi possono variare all' infinito; ma, calcolati i logaritmi per un dato sistema, facilmente si possono quelli computare per un altro sistema qualunque.

Sia x il logaritmo d'un numero qualsivoglia y, computato nel sistema che ha per base a, e vogliasi ottenere il logaritmo dello stesso numero in un sistema che abbia b per base; sia z

questo logaritmo; si avrà nel primo sistema $y=a^x$, nel secondo sistema $y=b^z$; onde $a^x=b^z$: prendendo i logaritmi dei due membri di quest'equazione nel sistema noto che ha per base a, ed avvertendo che log. $b^z = z$ log. b, e log. $a=1$, sarà

$x=z$ log. b; epperò $z=\frac{x}{\log. b}=\frac{\log. y}{\log. b}$; il che vuol dire, che,

essendo noto il logaritmo d' un numero in un determinato sistema, si avrà il logaritmo dello stesso numero in un altro sistema, dividendo il primo logaritmo per il logaritmo della nuova base preso nel primo sistema.

Così, per esempio, dai logaritmi comuni si posson dedurre i logaritmi Neperiani, cioè, i logaritmi, la cui base è 2,71828, sia dividendo i primi logaritmi per log. 2,71828, preso nel sistema volgare, sia moltiplicando i logaritmi comuni per il rapporto costante $\frac{1}{\log. 2{,}71828}$.

Siano x' e x'' i logaritmi di due numeri y' e y'', presi nel sistema che ha per base a; siano z' e z'' i logaritmi, degli stessi numeri, presi nel sistema che ha per base b; si avrà $z'=\frac{x'}{\log. b}$;

$z''=\frac{x''}{\log. b}$, e $\frac{z'}{z''}=\frac{x'}{x''}$, vale a dire, che i logaritmi di due numeri presi in qualunque sistema mantengono sempre tra di loro il medesimo rapporto.

§ 73. Che cosa s'intende per complemento aritmetico di un logaritmo.

Il *complemento aritmetico* d'un logaritmo è la differenza tra 10 ed un dato logaritmo minore di 10, od in altri termini è ciò che manca a questo logaritmo per formare il numero 10. Si

denota il complemento con *comp. log.* e talvolta colla sola L'.

Così comp. log. 3,4725843=10 − 3,4725843=6,5274157,

comp. log. 2,7325490=10−2,7325490=7,2674510.

Adoperando i complementi aritmetici si può eseguire, con una sola addizione, un calcolo, il quale esiga che si aggiungano più logaritmi e dalla somma se ne sottraggano più altri.

Debbasi, per esempio, trovare il valore dell'espressione

$$\text{Log. } A + \text{log. } B - \text{log. } a - \text{log. } b - \text{log. } c;$$

egli è manifesto che essa equivale a

$$\text{Log. } A + \text{log. } B + (10 - \text{log. } a) + (10 - \text{log. } b) + (10 - \text{log. } c) - 30,$$

ossia a log. A + log. B + comp. log. a + comp. log. b + comp. log. c − 30,

e quindi se ne ottiene il valore prendendo i complementi aritmetici de'logaritmi da sottrarsi, addizionandoli cogli altri logaritmi, e togliendo dalla somma tante decine quanti furono i complementi presi.

Dall'essere comp. log. a=10−log. a ne segue che, quando un logaritmo è sotto forma decimale, se ne ha il complemento aritmetico, sottraendo la sua prima cifra significativa di destra da 10 a tutte le altre cifre da 9. Si può fare quest'operazione mentalmente, e leggere in una tavola di logaritmi il complemento di un logaritmo contenuto nella medesima, quasi colla stessa facilità con cui si leggerebbe il logaritmo stesso.

Se in una data espressione, alcuno dei logaritmi da sottrarre fosse maggiore di 10, lo si sottrarrebbe dal multiplo di 10 che gli è immediatamente superiore. Così, se nell' esempio

precedente log. a fosse compreso fra 20 e 30, si darebbe all'espressione la forma

Log. A + log. B + (30 — log. a) + comp. log. b + comp. log. c — 50.

Ma questo caso avviene rarissime volte.

§ 74. Tavole di Callet. Disposizione de' numeri e de' loro logaritmi ordinarii.

Fra tutte le tavole che sono state pubblicate sin qui, meritano preferenza quelle del Callet, sia per la disposizione e pel grado di approssimazione con cui sono stati computati i logaritmi, sia per essere le più ampie e le meglio corrette.

Le tavole del Callet contengono i logaritmi de' numeri da 1 sino al 108000; i logaritmi sono calcolati per decimali sino alla settima cifra decimale inclusivamente. L'errore ossia la differenza fra un logaritmo calcolato sino a sette cifre decimali ed il valor vero è così lieve, che non può essere di veruna importanza nei calcoli ordinari. Quest'errore è sempre minore di una mezz'unità in più o in meno del 7° ordine decimale, cioè minore di $\frac{1}{2}$ 0,000000.

Le caratteristiche vi furono ommesse, perchè si trovano prontamente alla sola ispezione del numero, di cui si vuole il logaritmo.

La prima tavola che vi si trova è intitolata *chiliade* I, e contiene i numeri interi da 1 a 1200, ed i loro logaritmi, con 8 cifre decimali, e disposti in modo che ciascuno di essi è a destra e sulla stessa linea del numero corrispondente. In capo delle colonne dei numeri si vede la lettera N iniziale della parola numero, ed in capo di quelle de'logaritmi le iniziali Log.

Le tavole susseguenti danno i logaritmi dei numeri interi da 1020 a 108000. Nelle colonne intitolate N vi sono i numeri

interi da 1020 a 10799. Le colonne che seguono a destra, e sono notate colla cifra 0 scritta in capo ed a piè delle medesime, ne offrono i logaritmi, con 7 cifre decimali per i numeri da 1020 a 9999, e con 8 cifre decimali per quelli da 10000 a 10799. I numeri isolati, che sono nella parte sinistra di queste colonne, si devono immaginare ripetuti al disotto ed accanto a ciascuno dei numeri di quattro cifre, che sono nella parte destra. Ogni pagina è disposta in modo, che essa contiene 600 numeri co'rispettivi logaritmi.

I logaritmi di due numeri, de'quali uno è decuplo dell'altro, avendo la stessa parte decimale (§ 71), ne segue che le colonne ora menzionate danno anche i logaritmi de'numeri, di 10 in 10, da 10200 a 108000. I logaritmi de'numeri intermedii si ottengono ricorrendo alle colonne notate colle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 poste in capo ed a piè delle medesime, le quali contengono le quattro ultime cifre decimali de' logaritmi de' numeri che risultano, aggiungendo, a destra de' numeri posti sulla stessa linea nella colonna intitolata N, le cifre con cui esse sono notate.

Debbasi, per esempio, trovare il logaritmo del numero 86907. Si cerca nelle colonne intitolate N il numero 8690; si segue coll'occhio la linea orizzontale che lo contiene, finchè si giunga alla colonna segnata colla cifra 7; le cifre 0548, che vi si trovano, sono le ultime cifre decimali del logaritmo domandato; scrivendo a sinistra di queste cifre il primo numero isolato che s'incontra, salendo nella colonna verticale notata 0, ossia 939, si ha la parte decimale di log. 86907; aggiungendo a questa la caratteristica, che è 4, si ha finalmente log. 86907= 4,9390548.

Sia, per secondo esempio, da trovarsi il logaritmo di 104956. Si cerca nelle colonne N il numero 10495; si segue la linea orizzontale di questo numero sino ad incontrare la colonna notata 6; non trovandovisi alcun numero, si ricorre alla linea sottostante; le cifre 0727, che vi si trovano, sono le ultime cifre decimali del logaritmo cercato; vi si aggiungono, a sinistra,

le cifre isolate 0210 che sono sulla stessa linea e nella colonna segnata 0, e si ha la parte decimale del logaritmo; scrivendo accanto la caratteristica, che è 5, si ha log. 104956= 5,02100727.

Per agevolare la ricerca dei numeri e de'logaritmi si sono messe in capo a ciascuna delle pagine che seguono la chiliade I, le tre o quattro prime cifre di sinistra del numero che è in testa della colonna, precedute dalla lettera N, e le tre o quattro prime cifre decimali del logaritmo corrispondente, precedute dalla L.

L'ultima colonna di destra delle stesse pagine contiene le differenze che si ottengono sottraendo ciascun logaritmo dal logaritmo immediatamente maggiore, ed i valori, approssimati con errore non maggiore di 0. 5, delle loro parti decimali, ossia dei prodotti delle medesime per 0, 1; 0,2; 0, 3;... 0, 9. Questi prodotti, cominciando dalla pagina 10 (i numeri d'ordine delle pagine sono a piè delle medesime), formano tante piccole tavole quante sono le differenze; e ciascuna tavola è immediatamente al disotto della rispettiva differenza. Mediante simili tavole si ha con gran facilità il prodotto di una qualunque delle differenze per una frazione decimale qualunque con un errore trascurabile.

Vogliasi, per esempio, il prodotto della differenza 138, che è a pag. 41, per 0,5789. Si cercano nella piccola tavola, che è sotto la differenza 138, prodotti di questa per 0,5; 0,7; 0,8, e 0,9, i quali sono 69; 97; 110, e 124 con errore non maggiore di 0,5; si divide il secondo di questi numeri per 10, il terzo per 100 ed il quarto per 1000; i quozienti 9,7; 1,10; 0,124; saranno i prodotti di 138 per 0, 07, 0,008 e 0,0009 con errori non maggiori di 0,005, 0,0005 e 0,00005; epperciò il prodotto domandato sarà

$$69+9,7+1,10+0,124=79,924$$

con errore non maggiore di 0,5555, oppure 80 con errore non maggiore di 0,5555+0,076 ossia di 0,6315.

Nelle pagine 6, 7, 8 e 9 le differenze impari hanno, al disotto, le tavole delle loro parti decimali. Per avere il prodotto di un dato numero di decimi per una delle differenze pari contenute in tali pagine, basta cercare nelle rispettive tavole i prodotti del numero dato per la differenza precedente e per la seguente; se questi prodotti sono uguali, ciascun di essi è uguale al prodotto cercato, con errore non maggiore di 0,5 dell'ultimo ordine decimale; se differiscono di un'unità si può prendere uno qualunque di essi per il prodotto cercato e l'errore non sarà maggiore di 1; se differiscono di due unità, si ha il prodotto cercato, con errore non maggiore di 0,5, aggiungendo un' unità al prodotto minore.

In ogni pagina, dalla 1ª fino alla 168ª, vi sono altri numeri oltre a quelli già menzionati, de'quali non è qui il caso di discorrere, come pure non è il caso di discorrere delle tavole che seguono la pagina 168.

§ 75. Trovare, mediante le tavole di Callet, il logaritmo ordinario di un numero dato, intero o decimale.

Col mezzo delle tavole sopradescritte, si ha facilmente il logaritmo di un dato numero intero o decimale, con 7 cifre decimali ed anche, quando si voglia, con 8 cifre.

Se il numero intero è minore di 108000, se ne ha immediatamente il logaritmo con 7 cifre decimali e con un errore minore di una mezz' unità del 7° ordine decimale, seguendo le norme date nel § precedente. E colle avvertenze dello stesso paragrafo si otterranno altresì i logaritmi con 8 cifre decimali e con un errore minore di una mezz'unità dell'ultimo ordine per i numeri minori di 1201, oppure per quelli le cui tre prime cifre di sinistra formano un numero minore di 108.

Se il numero intero è maggiore di 108000 se ne ottiene

il logaritmo con sette cifre decimali e con un errore al più eccedente, di una quantità trascurabile, un'unità dell'ultimo ordine, operando nel modo seguente.

Dal numero dato si separano con una virgola, a destra tante cifre quante fa d'uopo per ottenere un numero decimale il quale sia minore del maggior numero contenuto nelle tavole ed il più grande che sia possibile: la parte decimale del logaritmo del numero così diviso sarà eguale a quella del numero proposto (§ 71); quindi si cercherà, come venne detto per i numeri minori di 108000, il logaritmo del numero delle cifre di sinistra così separate, avendo cura per altro di porre la caratteristica che conviene all'intiero numero proposto: poscia, dopo aver scorto con un solo sguardo, fra le ultime cifre dei logaritmi, qual è la differenza fra il logaritmo cercato e quello immediatamente superiore, si potrà fare, nel modo indicato nel paragrafo precedente, il prodotto di quella differenza per la parte decimale del numero che è risultata dalla separazione della virgola; si aggiungerà questo prodotto alle ultime cifre di destra del primo logaritmo, e si avrà così il logaritmo del numero dato. A vece di calcolare l'ultima porzione del logaritmo mediante la tavola delle parti decimali, egli è più preciso di fare addirittura la moltiplicazione della differenza per la parte decimale del numero.

Il seguente esempio varrà a chiarir meglio la cosa.

Suppongasi che si voglia avere il logaritmo del numero 310524. Per far sì che questo numero sia ne'limiti di quelli contenuti nelle tavole, basterà separare con una virgola l'ultima cifra e si avrà così 31052,4, il cui logaritmo ha la parte decimale eguale a quella del logaritmo di 310524: la caratteristica di quest'ultimo però sarà eguale a 5 (§ 71). La questione è adunque ridotta a trovare la porzione decimale che corrisponde al logaritmo di 31052,4. Ora questo numero è compreso fra 31052 e 31053, e il rispettivo logaritmo dev'essere pure compreso fra quelli di 31052 e 31053, ovvero eguale a quello di 31052 aumentato di una porzione di questo stesso logaritmo cor-

rispondente alla frazione 0,4, di cui il numero 31052,4 oltrepassa 31052. Giusta le norme date per la ricerca de' logaritmi de' numeri interi minori di 108000, si ha per la parte decimale del logaritmo

$$\begin{aligned} \log.\ 31053 &= 4921036 \\ \log.\ 31052 &= 4920896 \\ \hline \text{differenza} &= \quad 140 \end{aligned}$$

cioè la differenza fra questi due logaritmi è uguale a 140 diecimilionesimi.

Ammettendo come principio, che le differenze fra i logaritmi siano proporzionali alle differenze fra i numeri, si dirà: se per un'unità di differenza fra 31052 e 31053 si hanno 140 diecimilionesimi di differenza fra i rispettivi logaritmi, ne segue che per 0,4 di differenza fra 31052,4 e 31052 si dovrà avere una differenza fra i loro logaritmi espressa dal prodotto $140 \times 0{,}4 = 56$ diecimilionesimi (come sta scritto nella tavola delle parti decimali), la quale quantità vuolsi aggiungere al logaritmo di 31052 per ottenere la parte decimale del logaritmo di 31052,4 e si avrà così (prescindendo dalla caratteristica)

$$\log.\ 31052{,}4 = 4920952.$$

Dunque finalmente

$$\log.\ 310524 = 5{,}4920952$$

con un errore minore di un'unità dell'ultimo ordine (1).

(1) Vuolsi osservare che non è esatto il supporre la differenza de' numeri proporzionali a quelle de' rispettivi logaritmi, onde ciò dà origine ad errori. Un'altra causa di errori si ha in ciò che nelle proporzioni risultanti dall'ipotesi medesima

Ragionando ed operando nel modo ora detto, si troverebbe che la parte decimale del logaritmo di 6745619 è uguale a quella di log. 67456,19.

E (prescindendo dalla caratteristica)

$$\log.\ \dot{6}7456 = 8290206,$$

il prodotto della differenza 64 per 0,19=12,16, onde finalmente

$$\log.\ 6745619 = 6,8290218.$$

Così pure

$$\log.\ 759478923 = 8,8805157$$

cioè la porzione decimale del logaritmo è uguale a quella del logaritmo di 75947, più il prodotto della differenza 57 per 0,8923.

E qui si osservi che in quest'ultimo caso si è aggiunto 51 a vece di 50,8611 che risulta dal prodotto 57 per 0,8923 frazione decimale del numero, cioè nell'aggiungere soltanto la parte intera del prodotto, trascurando le cifre decimali, si usa comu-

---

non si prende per la differenza fra i logaritmi il vero valore, ma bensì il valore prossimo che si deduce dai logaritmi delle tavole Non è qui il caso di dare ragione del modo di determinare de' limiti di simili errori. Basti sapere che servendosi di alcuna delle tavole di logaritmi ordinarii comunemente adoperate, quando si determina nel modo sopra indicato il logaritmo di un numero, e si trascurano nel prodotto le cifre esprimenti unità minori di quelle dell' ultimo ordine decimale de' logaritmi dati dalle tavole, coll'avvertenza di aggiungere una unità all'ultima cifra conservata se la cifra seguente è maggiore di 5, l'errore in più od in meno nel logaritmo può al più eccedere, di una quantità trascurabile, un'unità dell'ultimo ordine decimale dei logaritmi della tavola stessa.

Onde si scorge che l'impiego delle tavole de' logaritmi ne'calcoli numerici non offre che valori approssimativi; ma queste approssimazioni sono sufficienti per tutte le operazioni che occorre usualmente di fare.

nemente di aumentare d'un'unità l'ultima cifra della parte intera, ogniqualvolta la prima cifra decimale è maggiore di 5 ovvero eguale a 5 susseguita da altre cifre. In tutti gli altri casi si aggiunge soltanto la parte intera, quale risulta dal prodotto, ed in tal caso l'errore può eccedere di una quantità trascurabile un'unità dell'ultimo ordine decimale dei logaritmi.

Se il numero è intero e maggiore di 108000 e le sue tre prime cifre di sinistra formano un numero minore di 108, se ne trova, collo stesso procedimento, il logaritmo con 8 cifre decimali e con un errore al più eccedente di una quantità trascurabile un'unità dell'ultimo ordine.

Suppongasi che si debba trovare il logaritmo di 1078258. Questo logaritmo è uguale a 6 più la parte decimale di log. 107825,8.

Nelle tavole a pag. 168, si trova che le 8 prime cifre decimali di log. 107825 sono 03271947 e la differenza delle tavole eguale a 403 unità dell'ultimo ordine: il prodotto di 403 per 0,8 è 322 con errore non maggiore di 0,5; aggiungendo questo numero a quello formato dalle cifre decimali soprascritte si ha

$$\log. 1078258 = 6{,}03272269$$

con errore al più eccedente di una quantità trascurabile, un'unità dell'ultimo ordine.

Se il numero è decimale e maggiore di 1, se ne ottiene il logaritmo, cercando la parte decimale del logaritmo del numero intero, che si ha togliendo la virgola, ed aggiungendovi la caratteristica conveniente (§ 71).

Così il logaritmo di 12,3437 sarà eguale a 1 (caratteristica di 12) più la parte decimale del logaritmo di 123437 che è 0914453, onde

$$\log. 12{,}3437 = 1{,}0914453.$$

Se il numero è maggiore di 1, intero o decimale, e le tre

prime cifre di sinistra formano un numero uguale a 108 o maggiore di 108, si può averne il logaritmo con 8 cifre decimali e con un errore al più eccedente di una quantità trascurabile un'unità e mezza dell'ultimo ordine. A questo fine si divide il numero dato per un numero di due o tre cifre, tale che ne risulti un quoziente le cui tre prime cifre di sinistra formino un numero minore di 108; si determina il logaritmo di questo quoziente con 8 cifre decimali, nel modo sovra spiegato; si cerca il logaritmo del divisore, pure con 8 cifre decimali, nella chiliade 1: la somma di questi logaritmi sarà il logaritmo cercato (§ 65). Se le tre prime cifre di sinistra del numero dato sono 108,109 o 119, si prende per divisore il numero formato dalle medesime: negli altri casi basta prendere per divisore il numero formato dalle due prime. Affinchè nel logaritmo cercato l'errore non superi quello sopranotato, il quoziente deve essere calcolato con un numero di cifre tale, che l'errore cagionato nel logaritmo corrispondente dalle cifre trascurate sia minore di un' unità del 9° ordine decimale; per quest'effetto basterà, in ogni caso, calcolarlo con 10 cifre.

Pongasi che si voglia il logaritmo di 3557308 con 8 cifre decimali. Si divide 3557308 per 35, cercando 10 cifre del quoziente; si trova che questo è 101637,3714; si determina il logaritmo di questo numero con 8 cifre decimali, ricorrendo alla pagina 158 delle tavole, e si trova 5,00705354, con errore al più eccedente di una quantità trascurabile un'unità dell'ultimo ordine; vi si aggiunge il logaritmo di 35 che è 1,54406804 con errore minore di una mezza unità dell'ultimo ordine; la somma 6,55112158 è il logaritmo domandato, con errore al più eguale ad un'unità e mezza dell'ultimo ordine, più una quantità trascurabile.

Finalmente se il numero decimale è minore di 1, si cercherà nelle tavole il logaritmo della parte decimale del numero dato; quindi si toglieranno da quello tante unità intere quante sono le cifre decimali del numero: la differenza che ne risulterà sarà il logaritmo negativo della frazione proposta.

Difatti pongasi che si voglia avere il logaritmo di 0,42: questo sarà eguale a

$$\log.\ \frac{42}{100} = \log.\ 42 - \log.\ 100 = \log.\ 42 - 2 = -0,3767507$$

Alla stessa guisa

$$\log.\ 0,75437 = \log. \frac{75437}{100000} = \log.\ 75437 - \log.\ 100000$$

$$= 4,8775844 - 5 = -0,1224156$$

$$\text{e } \log.\ 0,00287 = \log.\ \frac{287}{100000} = \log.\ 287 - 5 = -2,5421181$$

Se la frazione fosse periodica, si porrebbe anzitutto questa sotto forma frazionaria, e quindi dal logaritmo del numeratore si sottrarrebbe il logaritmo del denominatore: la differenza sarà il logaritmo della frazione.

Così log. 0,343434 sarà uguale a

$$\log.\ \frac{34}{99} = \log.\ 34 - \log.\ 99 = 1,53147892$$

$$-1,99563519 = -0,46415627$$

Onde —0,46415627 sarà il logaritmo della frazione periodica 0,343434.....

§ 76. Trovare il numero, di cui è dato il logaritmo ordinario.

Il problema inverso, cioè trovare il numero di cui è dato il logaritmo ordinario, si risolve pur facilmente per mezzo delle tavole di Callet.

Se il logaritmo dato si trova fra quelli della prima chiliade si avrà tosto il numero corrispondente: questo numero sarà nella colonna segnata N che precede immediatamente, nel senso orizzontale, quella che contiene il logaritmo dato. Così il numero corrispondente al logaritmo 2,30319606 sarà 201 (Chiliade 1, pag. 1).

Se il logaritmo non si trova nella chiliade suddetta, si cercheranno le tre prime cifre decimali del logaritmo fra i numeri isolati che si vedono nella colonna, segnata 0, delle tavole; quindi si cercheranno le 4 ultime cifre del logaritmo fra i numeri di 4 cifre che trovansi, discendendo, nella stessa colonna. Se ivi si trovano le 4 cifre in discorso, si avrà il numero corrispondente nella colonna segnata N, percorrendo la linea delle 4 ultime cifre del logaritmo nel senso orizzontale a sinistra.

Suppongasi che si voglia avere il numero corrispondente al logaritmo 3,4614985.

Si cercherà il numero 461 tra quelli isolati della colonna segnata 0; quindi, discendendo nel senso verticale della stessa colonna, si troverà alla 4ª linea le 4 ultime cifre del logaritmo, cioè 4985. Percorrendo ora nel senso orizzontale a sinistra sino alla colonna segnata N, si avrà 2894 pel numero corrispondente al logaritmo proposto.

Se le 4 ultime cifre del logaritmo dato non si trovano nella colonna segnata 0, si osserverà quali siano le cifre nella colonna stessa che più si avvicinino *in meno* a quelle proposte; si seguiterà quindi nel senso orizzontale, da sinistra a destra, la linea sulla quale trovansi quelle stesse cifre; se fra queste si troveranno le 4 ultime citre del dato logaritmo, si leggerà,

ascendendo o discendendo nel senso verticale di quella colonna, il numero che è in testa o ai piedi della colonna stessa; questo sarà la 5ª cifra del numero cercato, le cui 4 prime cifre si trovano, come fu detto nel caso precedente, nella colonna segnata N.

Vogliasi, ad esempio, avere il numero corrispondente al logaritmo 4,2133849. Si cercherà dapprima il numero 213 fra i numeri isolati della colonna segnata 0; si percorrerà quindi, discendendo, la stessa colonna, e si troverà che 2521 è il numero che più si avvicina in meno a 3849; si seguiti la linea orizzontale da sinistra a destra del numero 2521 e si troverà su questa stessa linea il numero 3849: si ascenda la colonna che contiene 3849 e si troverà il numero 5 in capo alla medesima: si aggiunga questo numero 5 alla destra del numero, cioè di 1634, che corrisponde alla linea orizzontale dove si trova il numero 3849: si avrà così il numero 16345 corrispondente al logaritmo proposto 4,2133849.

Se il logaritmo dato non si trova in nessuno dei casi precedenti (ed è questo il caso più frequente), ove vogliasi averne il numero corrispondente, si cercherà dapprima, secondo le norme dianzi spiegate, il logaritmo che più vi si avvicina in *meno*: si sottrarrà questo da quello, e la differenza si dividerà per la differenza della tavola che si osserva fra il logaritmo cercato e il logaritmo immediatamente superiore: il quoziente, spingendo l'operazione sino ai centesimi, formerà le cifre da aggiungersi alla destra di quelle trovate, a tenore del caso sovraccennato, pel logaritmo che più si avvicina in meno al logaritmo dato.

Suppongasi che si voglia avere il numero corrispondente al logaritmo 1,4708475. Secondo le norme date nel caso precedente, si vedrà che alla pag. 38 di Callet la parte decimale 8475 si trova compresa fra due parti decimali consecutive 8366 e 8513: onde la parte decimale che più si avvicina in meno a 4708475 è 4708366; la differenza fra questi due logaritmi è 109 diecimilionesimi. La differenza data dalla tavola, cioè fra 8366 e 8513, è 147.

Si ragiona allora nel seguente modo: se la differenza espressa

per 147 diecimilionesimi corrisponde ad un'unità di differenza fra due numeri, un solo diecimilionesimo corrisponderà a $\frac{1}{147}$ d'unità, e 109 diecimilionesimi per conseguenza a $\frac{109}{147}$ di unità (1).

Questa frazione, valutata in decimali sino ai centesimi so-

---

(1) Questo ragionamento è fondato sullo stesso principio già detto per la ricerca dei logaritmi, cioè non è rigorosamente esatto. Si osserva però che se nel logaritmo vi è un errore non maggiore di h unità dell'ultimo ordine decimale dei logaritmi della tavola, e se si vuol ridurre il quoziente $\frac{D'}{D}$ in decimali (D' esprime la differenza fra i logaritmi, e D quella delle tavole), aumentando d'una unità l'ultima cifra che si conserva quando la cifra seguente sia maggiore di 5 od eguale a 5, l'errore in $\frac{D'}{D}$ può al più essere, in più o in meno, eguale a

$$\frac{h+0,5}{\Delta}$$

più una mezz'unità dell'ultimo ordine conservato, più ancora una quantità trascurabile, Δ rappresenta la differenza D espressa in unità dell'ultimo ordine decimale dei logaritmi che sono nella tavola; epperciò quando $h=0,5$ (caso che avviene frequentemente) il maggior numero di cifre decimali di $\frac{D'}{D}$ che si può avere senza che l'errore superi notevolmente un'unità dell'ultimo ordine è uguale all'esponente della potenza di 10, eguale od immediatamente inferiore a $\frac{\Delta}{2}$; così, per esempio, quando Δ è $=252$, e $h=0,5$ se si cercano 2 cifre decimali del quoziente $\frac{D'}{D}$ correggendo la seconda, qualora la terza sia maggiore di 5, l'errore nel quoziente, in più o in meno, sarà minore di un centesimo.

Risulta adunque che essendo la differenza delle tavole maggiore di 200 fino al numero 21809 per tutti i numeri compresi fra 10000 e 21809, si può, riducendo $\frac{D'}{D}$ in decimali, spingere l'operazione sino ai centesimi e si avrà con ciò l'esattezza dell'ultima cifra decimale. Oltrepassato il numero 21809 e sino a quello 100000, pel quale la differenza delle tavole è 44, non si può contare che sull'esattezza della cifra dei decimi.

Dal 10000 al 108000, la differenza trovandosi di bel nuovo espressa da tre cifre (la prima delle quali a destra rappresenta delle unità dell'8° ordine), si può di nuovo contar sull'esattezza della cifra dei centesimi, giacchè questa differenza è fra 434 e 403 numeri maggiori di 200, ossia di $\frac{\Delta}{2}$.

lamente, darà la frazione 0,74, che aggiunta al numero 29569 corrispondente alla parte decimale di 4708366, formerà il numero 29569,74. E siccome la caratteristica del logaritmo proposto è 1, se ne deduce che il numero cercato non deve avere che due cifre alla sua parte intera: dunque realmente il numero corrispondente al logaritmo 1,4708475 sarà 29,56974.

Alla stessa guisa si troverebbe che il numero corrispondente a 4,5908722 è 38982,72.

Se il logaritmo ha otto cifre decimali, e se è minore di 03342376, che è l'ultimo logaritmo delle tavole, cioè il logaritmo di 108000, si potrà, seguendo le norme date precedentemente, trovare il numero corrispondente; sol che convien badare che al dissopra di 100000 i numeri isolati. che trovansi nella colonna segnata 0, hanno 4 cifre.

Pongasi di volere il numero, il cui logaritmo è 5,00114577. Si cercherà il logaritmo che più a questo s'avvicina, il quale è 5,00114503 corrispondente al numero 100264 (pag. 156); si sottragga 4503 da 4577, e la differenza 74 centomilionesimi si divida per 433 centomilionesimi, differenza che sta segnata nelle tavole: il quoziente 0,17 si aggiunga al numero 100264 e si avrà così 100264,17, che è il numero domandato, il cui logaritmo è 5,00114577.

Se la parte del logaritmo dato è maggiore di 03342376, si sceglierà nella 1ª chiliade un logaritmo tale che, sottratto dal logaritmo dato od aggiunto a questo logaritmo, la differenza o la somma dia origine ad un logaritmo, la cui parte decimale sia minore di 03342376. Si cercherà il numero al quale appartiene il logaritmo proveniente dalla differenza o dalla somma trovata; si moltiplicherà quindi o si dividerà questo numero per quello che, nella 1ª chiliade, corrisponde al logaritmo prescelto: il prodotto od il quoziente sarà il numero cercato.

La scelta del logaritmo da sottrarsi dal logaritmo proposto, ovvero da aggiungersi a questo logaritmo, non offre alcuna difficoltà. Il logaritmo da sottrarsi è quello che, nella 1ª chiliade, più si avvicina in meno al logaritmo dato. Quanto al logaritmo da

aggiungere, si presceglie nel seguente modo: si sottrae il logaritmo dato dal logaritmo di 101, e si prende il logaritmo che più s'avvicina in meno al risultato di questa sottrazione. I seguenti esempi varranno a render più chiara la cosa.

Suppongasi che si voglia cercare il numero il cui logaritmo è 6,46372612: si cerca, nella 1ª chiliade, il logaritmo che più si avvicina in meno di 6,46372612; questo è 2,46239800, logaritmo di 290: si sottrae l'uno dall'altro e si avrà la differenza 4,00132812: si cerca il numero al quale appartiene 4,00132812, e si trova, secondo le norme dianzi spiegate, che questo numero è 10030,6279, il quale moltiplicato per 290 darà nel prodotto il numero cercato 2908882,09.

Pongasi ora, per secondo esempio, che si voglia avere il numero il cui logaritmo è 0,49714987: si sottrae questo logaritmo da quello di 101, o meglio da quello di 10,1 che è 1,00432137; si avrà una differenza eguale a 0,50717150: si cerca il logaritmo che più a questo s'avvicina in meno, e si trova 0,50650503 logaritmo di 3,21: aggiungendo questo logaritmo al logaritmo dato 0,49714987, la somma risulterà eguale a 1,00365490: si cerca il numero al quale appartiene questo ultimo logaritmo e si trova secondo le norme dianzi spiegate, che questo numero è 10,0845123, il quale, diviso per 3,21, dà per quoziente 3,14159262, numero appunto che si cercava e corrispondente al logaritmo 0,49714987.

Vuolsi osservare che questi due ultimi casi sono poco usati, perchè egli è sufficiente per le operazioni che più comunemente occorrono, di spingere la ricerca de' logaritmi sino alla 7ª cifra decimale, onde il numero corrispondente ad un logaritmo di 8 cifre decimali si trova, secondo le norme dianzi spiegate, pe'numeri i cui logaritmi non si estendono oltre 7 cifre decimali.

Se il logaritmo dato è negativo, si cercherà nelle tavole il numero a cui corrisponde lo stesso logaritmo preso positivamente, e quindi si porrà questo numero per denominatore all'unità.

Diffatti sia $-m$ il logaritmo dato e y il numero corrispondente: sarà $y=10^{-m}$, ossia $y=\frac{1}{10^m}$ e se N è il numero che ha m per logaritmo, sarà $y=\frac{1}{N}$.

Ma si potrebbe ottenere la frazione a cui appartiene un logaritmo negativo, in una maniera più comoda ed utile.

Si è veduto nella teoria de'logaritmi (§ 71), che se si aggiunge 1, 2, 3, 4, 5 ecc. al logaritmo d'un numero, il logaritmo che si ottiene apparterrà ad un numero 10, 100, 1000, 10000, 100000 ecc. volte maggiore del primo; epperò se $\frac{p}{q}$ è la frazione che ha per logaritmo $-m$, i logaritmi

$$1-m,\ 2-m,\ 3-m,\ 4-m\ldots\ldots\ n-m$$

apparterranno alle frazioni

$$\frac{p\times10}{q},\ \frac{p\times100}{q},\ \frac{p\times1000}{q}\ldots\frac{p\times10^n}{q}$$

In questo modo un logaritmo negativo può mutarsi in positivo, aggiungendovi un numero positivo sufficientemente grande.

Pongasi ora $n-m=\log.$ N sarà

$$N=\frac{p\times10^n}{q} \text{ e finalmente } \frac{N}{10^n}=\frac{p}{q}$$

Donde risulta, che *per avere la frazione, alla quale corrisponde un logaritmo negativo, si deve primieramente aggiungere a questo logaritmo un numero di unità tale che il logaritmo diventi positivo: poi cercare nelle tavole il numero a cui appartiene questo logaritmo positivo; finalmente dividere il numero trovato per 10,*

elevato all'esponente indicato dal numero di unità che è stato aggiunto al logaritmo negativo dato.

Vogliasi, ad esempio, trovare la frazione a cui appartiene il logaritmo —0,2061817. Se vi si aggiunge il numero 2, si avrà il logaritmo positivo 1,7938183, il quale corrisponde al numero 62,204; dividendo questo numero per $10^2=100$, si avrà 0,62204 per la frazione, il cui logaritmo è appunto —0,2061817. Questo stesso numero si sarebbe pur trovato, cercando, come si disse poc'anzi, il numero corrispondente al logaritmo di 0,2061817 che è uguale a 1,607614, e ponendo questo numero per denominatore all'unità; onde si avrebbe

$$\frac{1}{1,607614}=\frac{10}{16,07614}=0,62204.$$

Si usa comunemente di aggiungere 10 unità ad un logaritmo negativo perchè diventi positivo; e il numero che ne risulta dicesi ***complemento aritmetico del logaritmo negativo, preso bensì positivamente*** (1). Se al logaritmo —0,2347109 si aggiunge il numero 10, il risultato

$$10-0,2347109=9,7652891$$

si dirà il complemento aritmetico del logaritmo —0,2347109, considerato però quest'ultimo positivamente. Ove si voglia avere il numero ossia la frazione corrispondente ad un complemento aritmetico di un logaritmo negativo preso bensì come positivo,

(1) Vuolsi qui notare che dalla definizione data (§ 73) il complemento aritmetico d'un logaritmo negativo è uguale a

$$10-(-m)=10+m$$

$-m$ esprimendo un logaritmo negativo.

Onde se $-m$ è un logaritmo negativo, $10-m$ sarà il complemento aritmetico del logaritmo m, ovvero del logaritmo $-m$ preso positivamente.

si cercherà nelle tavole il numero a cui appartiene il logaritmo espresso dal complemento aritmetico, e si dividerà quel numero per 10^{10}, ossia per 10000000000. Il risultato sarà la frazione che si cerca.

Ed in vero, se $10-m$ esprime un complemento aritmetico del logaritmo (preso positivamente) della frazione $\frac{p}{q}$, e se N è il numero il cui logaritmo è $10 - m$, sarà, per la ragione detta poc'anzi,

$$\frac{N}{10^{10}}=\frac{p}{q}$$

Pongasi che si voglia avere la frazione, di cui il logaritmo, preso come positivo, ha per complemento aritmetico 9,9780481, si cercherà nelle tavole il numero a cui appartiene il logaritmo 9,9780481 e si troverà 9507100000; questo diviso per 10^{10}, ossia per 10000000000, darà un quoziente eguale a 0,95071 che è appunto la frazione domandata.

Giova qui avvertire che dalla caratteristica d'un complemento aritmetico d'un logaritmo si può immediatamente dedurre qual sia l'ordine più elevato delle unità decimali contenute nella frazione a cui appartiene lo stesso logaritmo, *ma negativo*. Abbiasi, per esempio, un complemento aritmetico espresso per 9, m, essendo m la parte decimale del complemento aritmetico. Se si cerca nelle tavole il numero che ha per logaritmo 9, m, la parte intera di questo numero dovrà essere composta di dieci cifre, cioè d'una cifra di più degli uni che sono contenuti nella caratteristica 9; ma trovato questo numero, si dovrà dividerlo per 10^{10}, ciò che si fa, trasportando la virgola di 10 cifre a sinistra, cosicchè la prima cifra significativa del numero, il cui logaritmo preso positivamente ha per complemento aritmetico 9, a, esprimerà dei decimi. Se il complemento aritmetico fosse 8, a, la parte intera del numero, che vi corrisponde nelle tavole, si troverebbe composta di 9 cifre; ma dividendo lo stesso numero per 10^{10}, ossia trasportando la virgola di dieci cifre a sinistra, la prima cifra significativa del quoziente non esprimerà che centesimi. Allo

stesso modo si troverà che la prima cifra significativa delle frazioni decimali, i cui logaritmi, presi positivamente, hanno per complemento aritmetico 7,*a*, 6,*a*, 5,*a* ecc., esprimerà millesimi, decimillesimi, centomillesimi ecc.

Segue da ciò, che dato il complemento aritmetico di un logaritmo, si troverà immediatamente la frazione alla quale corrisponde questo logaritmo, *negativo bensì*, cercando nelle tavole il numero che ha per logaritmo il complemento aritmetico, senza guardare altrimenti alla di lui caratteristica; e rendendo poi la prima cifra significativa del numero trovato atta a rappresentare o decimi, o centesimi, o millesimi ecc., secondo che la caratteristica del complemento è espressa per 9 o per 8 o per 7 ecc.

Reciprocamente: data una frazione decimale, si potrà immediatamente avere il complemento aritmetico del suo logaritmo *preso bensì positivo*, considerando questa frazione come numero intero, poi cercando nelle tavole la parte decimale del logaritmo che appartiene a questo numero e ponendovi per caratteristica 9, 8, 7, 6 ecc., secondo che la prima cifra significativa della frazione decimale esprimeva già prima de' decimi o centesimi o millesimi o decimillesimi ecc.

Vogliasi, ad esempio, il complemento aritmetico, del logaritmo, *preso positivamente*, della frazione decimale 0,219. Questo logaritmo, e —0,65955589 il complemento aritmetico di questo logaritmo preso positivamente, sarebbe

$$10 - 0{,}65955589 = 9{,}34044411$$

in cui 34044411 è appunto la parte decimale del logaritmo di 2:9.

Alla stessa guisa si avrebbero, pei complementi aritmetici de' logaritmi, presi positivamente, delle frazioni

0,042, 0,002, 0,0004
8,62324929, 7,30103000, 6,60205999

in cui le parti decimali sono appunto quelle corrispondenti, rispettivamente, ai numeri 42, 2, 4.

§ 77. Uso delle tavole di La Lande.

Le tavole di Callet, intorno all'uso delle quali si è dato sinqui un'ampia spiegazione, sebbene non comprendano che 7 od 8 cifre decimali, sono tuttavia sufficienti per tutte le operazioni delicate dell' astronomia e della navigazione.

Per la maggior parte poi de' calcoli ordinari sono sufficienti quelle pubblicate da La Lande sulla base 10 eziandio, intorno all'uso delle quali credesi utile far qui cenno, siccome quelle che, pel loro piccolo volume, riescono assai più portatili e comode che non quelle di Callet (1).

Queste tavole contengono i logaritmi di tutti i numeri interi da 1 sino a 10000. I logaritmi dei 990 primi numeri comprendono 8 cifre decimali, gli altri logaritmi non ne hanno che 7.

L'errore risultante dalle cifre decimali che furono soppresse in queste tavole è sempre minore d'una mezz'unità decimale dell'ordine conservato.

I numeri interi trovansi nelle colonne verticali intitolate *Nomb*, ed i rispettivi logaritmi stanno a fianco nelle colonne

(1) Le tavole, di cui qui si discorre, sono quelle intitolate *Tables de Logarithmes par Jérome de La Lande étendues à sept décimales, par F. C. M. Marie*. Trovasi pure un'altra edizione delle tavole pure di La Lande estese a sole 5 cifre decimali: l'uso di queste ultime è pari a quello delle tavole di 7 cifre: solo vuolsi avvertire che esse non sono destinate se non che per le operazioni di 4 cifre intere, cioè non offrono che le 4 prime cifre esatte. Onde nel caso che abbiansi ad effettuare operazioni sopra numeri di più di 4 cifre intere, converrà ricorrere alle tavole estese a 7 cifre decimali.

Il prezzo in commercio delle Tavole di La Lande è di L. 4; quello delle Tavole di Callet, di L. 18.

verticali intitolate *Logarit.* Ogni logaritmo comprende eziandio la rispettiva caratteristica; così si scorge tosto, ad esempio, che

$$\log. 795 = 2,90036713$$

$$\text{e } \log. 6032 = 3,7804613.$$

La differenza fra i logaritmi di due numeri interi consecutivi, compresi fra 990 e 10000, si trova, alla destra nella colonna verticale, notata *Diff.* La prima cifra a destra di questa differenza esprime dei diecimilionesimi d'unità. Così la differenza fra log. 3495 e log. 3496 è 0,0001242. Fu ommessa la differenza fra i logaritmi de'numeri interi minori di 990, perchè si può farne a meno, come si vedrà in appresso.

Ecco in breve il modo di servirsi di queste tavole.

Trovare il logaritmo d'un numero dato.

Allorchè il numero è intero e minore di 10000, si cercherà questo numero nelle colonne intitolate *Nomb*, ed il rispettivo logaritmo sarà sulla destra nella colonna intitolata *Logarit.*

Se il numero dato è intero e maggiore di 10000, si calcolerà il logaritmo di quel numero considerando quest'ultimo siccome decimale e tale che la parte intera sia compresa fra 1000 e 10000; quindi si aggiungeranno tanti uni alla caratteristica quante sono le cifre decimali del numero.

Suppongasi che si voglia avere il logaritmo di 169492.

Questo numero essendo uguale a 1694,92×100, ne segue che si otterrà il logaritmo di 169492 aggiungendo 2 unità al logaritmo di 1694,92. Per tal fine si osservi che questo numero decimale essendo compreso fra 1694 e 1695, il logaritmo di 1694,92 sarà compreso fra i logaritmi di quei due numeri, cioè fra 3,2289134 e 3,2291697.

Per trovare la quantità x che convien aggiungere al logaritmo 3,2289134 del numero 1694, onde ottenere il logaritmo di 1694,92, si farà lo stesso ragionamento e calcolo già spiegato per l'uso delle tavole di Callet, cioè:

La differenza 1 fra i due numeri interi consecutivi 1694 e 1695, fra i quali è compreso il numero 1694,92, sta alla differenza 0,92 fra il numero dato ed il numero intero immediatamente inferiore, come la differenza 0,0002563 fra i logaritmi dei due numeri interi sta alla differenza x fra il minore di questi due logaritmi ed il logaritmo cercato. Onde

$$1 : 0,92 :: 0,0002563 : x$$

e perciò

$$x = 0,000235796$$

ossia

$$x = 0,0002358$$

limitandosi all'ultimo ordine de' decimali delle tavole ed aumentando, secondo la convenzione già prescritta nel § precedente, di un' unità l' ultima cifra del 7° ordine, perchè seguita da una cifra maggiore di 5. Si aggiunga questo valore di x al logaritmo di 1694 cioè a 3,2289134: la somma 3,2291492 sarà il logaritmo di 1694,92. Il logaritmo di 169492 sarà adunque eguale a

$$3,2291492 + 2 = 5,2291492.$$

Per trovare il logaritmo d'un numero decimale minore di 990, si considererà questo numero siccome intero, e quindi si calcolerà, come nel caso ora detto, il logaritmo di quest'ultimo e si toglieranno infine dalla caratteristica altrettante unità quante sono le cifre decimali del numero dato.

Così il logaritmo del numero 981,46 sarebbe eguale al logaritmo di 98146—2.

Ora il logaritmo di 98146, calcolato secondo le norme

sovraccennate, è uguale a 4,9918726; onde il logaritmo di 981,46 riuscirebbe uguale a

$$4,9918726-2=2,9918726.$$

Colle stesse regole già date nel § precedente, si calcoleranno colle tavole di La Lande i logaritmi delle frazioni e dei numeri decimali.

Dato un logaritmo, trovare il numero a cui appartiene.

Allorchè il logaritmo dato si trova nelle tavole, in una delle colonne intitolate *Logarit.*, il numero corrispondente è collocato a sinistra nella colonna intitolata *Nomb.* Così si scorge tosto che i logaritmi

1,92427929 3,4156410

appartengono rispettivamente ai numeri

84. 2604.

Se il logaritmo dato ha la caratteristica 3 e non si trova nelle tavole, esso cadrà necessariamente fra i logaritmi delle tavole, di due numeri interi consecutivi di 4 cifre: il minore di questi due numeri esprimerà la parte intera del numero decimale, al quale appartiene il logaritmo dato. La parte decimale del numero sarà quindi determinata dalla proporzione seguente: la differenza fra i due logaritmi delle tavole, fra i quali è compreso il logaritmo dato, sta alla differenza fra il logaritmo dato e quello minore de' due logaritmi delle tavole, come l'unità sta alla parte decimale x del numero, al quale appartiene il logaritmo dato. Si calcolerà x con tre decimali.

Suppongasi che si voglia il numero corrispondente al logaritmo 3,6059022. Si scorge dalle tavole che questo logaritmo è

compreso fra i logaritmi 3,6058435 e 3,6059512 de' numeri 4035 e 4036: la parte intera del numero cercato sarà adunque 4035.

Per calcolare la parte decimale x di questo numero, si prenderà dapprima nella colonna *Diff.* la differenza fra il log. di 4035 e il log. 4036, la quale è uguale a 0,0001077: si cercherà quindi la differenza fra il logaritmo dato e il logaritmo delle tavole immediatamente inferiore, la quale è 0,0000587 e s'instituirà la seguente proporzione:

$$0{,}0001077 : 0{,}0000587 :: 1 : x$$

ossia

$$1077 : 587 :: 1 : x$$

donde

$$x = 0{,}545.$$

Il logaritmo 3,6059022 apparterrà adunque al numero 4035,545 con un errore minore di un millesimo.

Se la caratteristica del logaritmo positivo dato non è 3, si ricondurrà il caso al precedente, aumentando o diminuendo la caratteristica di alcune unità in modo che essa divenga eguale a 3, onde trovare, col mezzo delle tavole, il maggiore numero possibile di cifre del numero richiesto. Si cercherà quindi, colle norme ora dette, il numero al quale appartiene il nuovo logaritmo, calcolando questo numero con tre decimali, e si avanzerà infine la virgola di altrettante cifre a destra od a sinistra di questo numero, quante furono le unità aggiunte alla caratteristica ovvero sottratte da questa.

Pongasi che si voglia il numero corrispondente al logaritmo 1,3801652. Si aggiungano 2 unità alla caratteristica e si troverà che il logaritmo 3,3801652 appartiene al numero 2399,746. Si avanzi la virgola di due cifre a sinistra, a motivo delle 2 unità aggiunte alla caratteristica del logaritmo dato e si avrà così

23,997 pel numero cercato, il cui logaritmo è 1,3801652 con un errore minore di un millesimo.

Pongasi ora che si voglia trovare il numero corrispondente al logaritmo 5,4709082. Si diminuisca di 2 unità la caratteristica e si cerchi il numero corrispondente al logaritmo 3,4709082: questo è 2957,387. Si avanzi la virgola di due cifre a destra, a motivo delle due unità sottratte dalla caratteristica e si avrà 295738,7 pel numero corrispondente al logaritmo proposto, con un errore minore di un decimo.

Se il logaritmo dato è negativo, si aggiungerà a questo un numero sufficiente d'unità tale a rendere il logaritmo positivo ed affetto dalla caratteristica 3, cioè si aggiungeranno 4 unità oltre quelle espresse dalla caratteristica. Si cercherà quindi il numero al quale appartiene questo nuovo logaritmo, e si avanzerà infine la virgola verso la sinistra del numero di altrettante cifre quante furono le unità aggiunte..

Pongasi che si voglia il numero corrispondente al logaritmo negativo—3,4770801. Si aggiungano $3+4=7$ unità a—3,4770801; la somma sarà $7-3,4770801=3,5229199$. Si cerchi il numero corrispondente a questo logaritmo, e si troverà 3333,649 con errore minore di un millesimo. Si avanzi la virgola di 7 cifre a sinistra del numero 3333,649 a motivo delle 7 unità aggiunte al logaritmo dato; il risultato 0,0003334 sarà il numero cercato in meno di un diecimilionesimo.

Vuolsi qui osservare che facendo uso delle tavole di La Lande estese a 7 cifre decimali:

1° Ogniqualvolta si cerca, co' metodi sovraccennati, il logaritmo di un numero che non si trova nelle tavole, si ottiene il valore di questo logaritmo in meno d'un'unità del 7° ordine decimale.

2° Essendo dato un logaritmo che non si trova nelle tavole e la cui caratteristica è stata ricondotta a 3, si ottiene immediatamente nelle tavole la parte intera di questo numero, il quale sarà composto di quattro cifre; in seguito colla nota proporzione si avranno le tre prime cifre decimali del numero; ed in

questo caso l' errore non potrà mai eccedere due millesimi. Onde si otterranno le 7 prime cifre del numero in meno di due unità, dell'ultimo ordine del numero , nel caso il più sfavorevole.

Così nella ricerca d'un numero corrispondente ad un logaritmo avente 4 per caratteristica, si avranno esatte le 5 cifre intere e le due prime decimali con un errore che può eccedere di una quantità trascurabile due centesimi.

ARTICOLO III.

Applicazioni de' logaritmi.

Esempi di calcoli fatti coi logaritmi — Problemi relativi all'interesse composto.

---

§ 78. Esempi di calcoli fatti coi logaritmi.

Quantunque le cose dette nei due articoli precedenti siano sufficienti per far comprendere come si debba procedere per calcolare, mediante i logaritmi, il valore di una data espressione in cui le operazioni indicate siano moltiplicazione, divisione, innalzamento a potenza od estrazione di radice, e per risolvere un' equazione esponenziale, credesi tuttavia conveniente di dare alcuni esempi, sia perchè servano di esercizio, sia per indicare il modo di disporre il calcolo.

Se il valore dell' espressione data è un numero negativo, si cangia il segno dell'espressione; si calcola il valore dell' espressione risultante, indi si mette avanti il segno —.

Se si dovesse calcolare il valore di un polinomio, si calcolerebbe separatamente, fatta astrazione dal segno, il valore di ciascuno de' suoi termini ed i valori trovati si addizionerebbero o sottrarrebbero, secondochè i termini sono preceduti dal segno + o dal segno —.

1° *Esempio.* Si domanda il valore dell'espressione

$$x = \frac{7534 \times 10597{,}6 \times 0875698}{873 \times 2{,}8972}$$

Si avrà $\log. x = [\log. 7534 + \log. 10597{,}6 + (10 + \log. 0{,}875698) + \text{comp.} \log. 873 + \text{comp.} \log. 2{,}8972 - 30]$

log.	7534 =	3,8770256
log.	10597,6 =	4,0252075
10 + log.	0,875698 =	9,9423543
Comp. log.	873 =	7,0589858
Comp. log.	2,8972 =	9,5380215
30 + log.	x =	34,4415947

donde, sottraendo 30 da ambi i membri,
si ha log. $x = 4{,}4415947$
e finalmente $x = 27645{,}6$ con errore minore di 0,1.

2° *Esempio.* Abbiasi da calcolare il valore dell'espressione

$$x = \left(\frac{172 \times 0{,}875}{32{,}7312 \times 923} \right)^2$$

Si avrà

$$\frac{1}{2} \log. x = [\log. 172 + (10 + \log. 0{,}875) + \text{comp.} \log. 32{,}7312 + \text{comp.} \log. 923 - 30].$$

log.	172 =	2,2355284
10 + log.	0,875 =	9,9420081
Comp. log.	32,7312 =	8,4850381
Comp. log.	923 =	7,0347983
$30 + \frac{1}{2}$ log.	x =	27,6973729
60 + log.	x =	55,3947458
10 + log.	x =	5,3947458

ed in fine $x = 0{,}0000248168$ con errore minore di 0,0000000001.

3° *Esempio.* Sia $\qquad x=\sqrt{\frac{1,687\times 0,00973\times 0,00087}{7,537892\times 0,0853}}$

l'espressione di cui si cerca il valore.

Si avrà $\log. x^2=2\log. x=[\log. 1,687+(10+\log. 0,00973)$
$+(10+\log. 0,00087)-20$
$-(\log. 7,537892+(10+\log. 0,0853)-10)]$
$=[\log. 1,687+(10+\log. 0,00973)+(10+\log. 0,00087)-20$
$+10-(\log. 7,537892+(10+\log. 0,0853]$

log.	7,537892=	0,8772499
10+log.	0,0853=	8,9309490
10+log.	denom.=	9,8081989
log.	1,687=	0,2271151
10+log.	0,00973=	7,9881128
10+log.	0,00087=	6,9395193
—log.	denom.=	0,1918011
20+2 log.	x=	15,3465483
10+log.	x=	7,6732741

ed $x=0,00471275$ con errore minore di 0,00000001.

Per ben comprendere il procedimento seguito in quest'esempio si osservi che, sottraendo da 10 ambi i membri dell'eguaglianza $10+\log.$ denominatore $=9,80819895$, si ha $-\log.$ denominatore$=0,19180105$.

4° *Esempio.* Sia da valutarsi l'espressione $x = \sqrt[7]{\left(\frac{89}{724}\right)^2}$
si avrà $\log. x^7 = 7 \log. x = 2$ (log. 89+comp. log. 724 — 10)

$$\log. \quad 89 = 1,9493900$$
$$\text{comp. log.} \quad 724 = 7,1402614$$

$$10 + \log. \left(\frac{89}{724}\right) = 9,0896514$$

$$20 + 2 \log. \left(\frac{89}{724}\right) = 18,1793029$$

$$70 + 2 \log. \left(\frac{89}{724}\right) = 68,1793029$$

$$10 + \frac{2}{7} \log. \left(\frac{89}{724}\right) = 9,7399004$$

donde $x = 0,549415$ con errore minore di 0,000001.

5° *Esempio.* Abbiasi da risolvere l'equazione

$$(8,7)^x = 752,872$$

Se si prendono i logaritmi dei due membri dell'equazione, si ha

$$x \log. 8,7 = \log. 752,872$$

donde si ricava

$$x = \frac{\log. 752,872}{\log. 8,7} = \frac{2,8767212}{0,9395193} = 3,06...$$

Questo risultato dimostra che il numero 752,872 non è una potenza perfetta di 8, 7, ma è compreso fra la terza e la quarta potenza di questo numero ed è notevolmente più prossimo a quella che a questa.

6° *Esempio.* Debbasi risolvere l'equazione $(0,52)^x = 0,2704$.

Prendendo i logaritmi di ambi i membri dell'equazione, si ha

$$x \log. 0,52 = \log. 0,2704$$

donde

$$x = \frac{\log. 0,2704}{\log. 0,52} = \frac{-0,5679933}{-0,2839967} = \frac{5679933}{2839967} = 1,9999996.....$$

Il numero 1,9999996..... non è il vero valore di x, perchè $-0,5679933$ e $-0,2839967$ non sono i veri valori di log. 0,2704 e log. 0,52; d'altra parte tale numero differisce pochissimo da 2; conviene perciò riconoscere se il vero valore di x non sia 2. Per questo basta formare la seconda potenza di 0,52; formandola si trova che è appunto 0,2704; dunque $x = 2$.

§ 79. Problemi relativi all'interesse composto.

La maggior parte dei problemi, che si possono proporre riguardo ai capitali impiegati a interesse composto, si risolvono facilmente col mezzo dei logaritmi.

Un capitale dicesi impiegato a *interesse composto*, quando il mutuante, invece di riscuotere l'interesse al fine di ciascun anno, lo lascia nelle mani del mutuatario, acciocchè frutti insieme al capitale nell'anno seguente.

Sia c *un capitale impiegato a interesse composto, e si domandi il valore che esso avrà dopo* t *anni dall'epoca del mutuo, essendo* r *l'interesse annuale dell'unità.*

Se si rappresentano con c_1, c_2, c_3.... i valori del ca-

pitale c dopo 1, 2, 3.... anni dall'epoca del mutuo, sarà manifestamente

$$c_1 = c + c\,r = c\,(1+r),$$

$$c_2 = c_1\,(1+r) = c\,(1+r)^2$$

$$c_3 = c_2\,(1+r) = c\,(1+r)^3$$

. . . . ;

dunque, se si nota con C il valore domandato, si avrà dopo t anni

$$C = c\,(1+r)^t \quad (1)$$

e, prendendo i logaritmi dei due membri di questa equazione,

$$\log. C = \log. c + t \log. (1+r).$$

Esempio. Debbasi trovare il valore che avrà dopo 20 anni un capitale di 12000 lire, impiegato a interesse composto, l'interesse essendo al 6 %. In questo caso $c = 12000$, $r = 0{,}06$ e $t = 20$; dunque $C = 12000 \times (1{,}06)^{20}$.

Operando coi logaritmi si avrà

$$\log. C = \log. 12000 + 20 \log. (1{,}06)$$

ossia $$\log. C = 4{,}0791812 + 0{,}5061174 = 4{,}5852986$$

e $$C = 38485^{\text{ll}},6 \text{ con errore minore di } 0^{\text{ll}},1.$$

Si osservi che, quando sono date tre delle quattro quan-

tità C, c, r, t, il valore della quarta è determinato dall' equazione (1).

Se sono date C, r, t, si ha

$$c = \frac{C}{(1+r)^t}$$

e $$\log. c = \log. C - t \log. (1+r).$$

Esempio. Si domanda il valore presente di un capitale di 10000 lire, pagabile dopo 10 anni, supponendo l'interesse composto ed al 5 %. In questo caso C=10000, $t=10$, $r=0{,}05$ e l'incognita è c; dunque il valore domandato è $=\frac{10000}{(1{,}05)^{10}}$ $=6139^{\text{ll}},13$ con errore minore di $0^{\text{ll}},01$.

Se sono date C, c, t, si avrà dapprima estraendo da ambi i termini la radice t^{esima}

$$\sqrt[t]{C} = \sqrt[t]{c}\,(1+r)$$

e quindi $$r = \sqrt[t]{\frac{C}{c}} - 1.$$

Volendosi in questo caso adoperare i logaritmi, si comincierà a calcolare il valore di $\sqrt[t]{\frac{C}{c}}$ e quindi lo si diminuirà di un'unità.

Se sono date C, c, r, si avrà $\log. c = \log. C - t \log. (1+r)$

e quindi $$t = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1+r)}$$

Abbiasi da determinare la somma che si deve pagare annualmente, durante t *anni, per estinguere un debito* c *cogli interessi dal medesimo prodotti, essendo* r *l'interesse annuo dell'unità.*

È chiaro, che rappresentando con a la somma cercata e con $a_1, a_2 \dots a_t$ i valori che avranno, dopo t anni, le somme a pagate al fine del 1°, 2°.... t^{esimo} anno, sarà

$$a_1 = a\,(1+r)^{t-1},\ a_2 = a\,(1+r)^{t-2} \dots\dots\ a_t = a;$$

ora questi valori, presi insieme, devono uguagliare il valore del capitale c dopo t anni, il quale è

$$c\,(1+r)^t;$$

dunque si ha, per determinare a, l'eqnazione

$$c\,(1+r)^t = a\,(1+r)^{t-1} + a\,(1+r)^{t-2} + \dots\dots + a$$

ossia, scrivendo in ordine inverso i termini del secondo membro,

$$c\,(1+r)^t = a + a\,(1+r) + \dots\dots + a\,(1+r)^{t-1}.$$

I termini del 2° membro di quest'equazione formano una progressione per quoziente, in cui il primo termine è a, la ragione è $1+r$ e l'ultimo termine è $a\,(1+r)^{t-1}$; dunque (§ 58)

$$c\,(1+r)^t = \frac{a\,[(1+r)^t - 1]}{r}$$

donde si trae

$$a = \frac{cr\,(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}\ (2).$$

Esempio. Sia $c=80000$ lire, $r=0^{\text{ll}},06$ e $t=20$; sarà

$$a=\frac{80000\times0,06\times(1,06)^{20}}{(1,06)^{20}-1}$$

Per trovare il valore di quest'espressione coi logaritmi, si calcola il valore di $(1,06)^{20}$ che è 3,20714 con errore minore di 0,00001, quindi lo si sostituisce nel denominatore dell'espressione; si trova così

$$a=\frac{80000\times0,06\times(1,06)^{20}}{2,20714}$$

donde, calcolando coi logaritmi, si ha $a=6975^{\text{ll}}$ con errore minore di 1^{ll}.

Coll' equazione (2) si può determinare una delle quattro quantità c, a, r, t, quando sono date le altre tre.

La determinazione di r dipende dalla risoluzione di un'equazione del $(t^{\text{esimo}}+1)$ grado.

Se l'incognita è c, si ha evidentemente

$$c=\frac{a[(1+r)^t-1]}{r\,(1+r)^t}$$

Per risolvere l'equazione (2) rispetto a t, si comincia a ricavare dalla medesima il valore di $(1+r)^t$ che è

$$(1+r)^t=\frac{a}{a-cr}$$

se ne prende quindi il logaritmo, si trova così

$$t\ \log.\ (1+r)=\log.\ a-\log.\ (a-cr)$$

donde si ha

$$t=\frac{\log.\ a-\log.\ (a-cr)}{\log.\ (1+r)}$$

Si domandi qual è la somma che si deve depositare annualmente in una cassa di risparmio, per ottenere, dopo t *anni, un capitale* C *per mezzo dell'accumulazione de' depositi e de' loro interessi composti, essendo* r *l'interesse annuo dell'unità.*

Si noti con a la somma domandata e con a_1, a_2... a i valori che avranno dopo t anni le somme a depositate al principio del 1°, 2°... t^{esimo} anno; sarà

$$a_1 = a\,(1+r)^t,\ a_2 = a\,(1+r)^{t-1} \ldots\ a_t = a\,(1+r)$$

ma $$C = a_1 + a_2 + \ldots + a_t$$

dunque $$C = a\,(1+r)^t + a\,(1+r)^{t-1} + \ldots + a\,(1+r)$$

oppure, scrivendo in ordine inverso i termini del secondo membro, si avrà

$$C = a\,(1+r) + a\,(1+r)^2 + \ldots + a\,(1+r)^t.$$

Ora i termini del secondo membro di questa equazione formano una progressione per quoziente, in cui il primo termine è $a\,(1+r)$, l'ultimo è $a\,(1+r)^t$ e la ragione è $1+r$, dunque

$$C = \frac{a(1+r)^t\,(1+r) - a\,(1+r)}{r} = \frac{a\,(1+r[(1+r)^t - 1]}{r}$$

donde si ricava

$$a = \frac{Cr}{(1+r)\,[(1+r)^t - 1]}.$$

FINE

INDICE

PARTE PRIMA

ARITMETICA

Nozioni preliminari . . . . *Pag.* 1
Addizione o somma . . . . » 11
Sottrazione o differenza . . . . » 16
Moltiplicazione . . . . » 22
Divisione . . . . » 31
Applicazioni della moltiplicazione e divisione alla soluzione di alcuni quesiti . . . . » 42
Proprietà relative alla divisibilità dei numeri . . . . » 44
Divisibilità dei numeri per 2, per 5, per 4 o 25, per 8 o 125, per 3 o 9 e per 11 . . . . » 46
Ricerca dei divisori di un numero . . . . » 50
Frazioni ordinarie, numeratore, denominatore, frazioni propriamente dette e frazioni improprie . . . . » 52
Riduzione delle frazioni ordinarie a minimi termini . . . . » 58
Massimo comun divisore e ricerca del medesimo . . . . » 59
Riduzioni delle frazioni allo stesso denominatore . . . . » 62
Operazioni che possono praticarsi sopra una frazione senza cangiarne il valore . . . . » 65
Addizione delle frazioni ordinarie . . . . » 66
Sottrazione id. . . . . » 67
Moltiplicazione id. . . . . » 68
Divisione id. . . . . » 71

Frazioni decimali. . . . . Pag. 74
Addizione delle frazioni decimali. . . . . » 78
Sottrazione id. » 78
Moltiplicazione id. » 79
Divisione id. » 80
Riduzione di frazioni ordinarie in frazioni decimali e viceversa; frazioni decimali finite, periodiche semplici, periodiche miste . . . . . . » 82
Numeri complessi. . . . . » 91
Divisioni e suddivisioni delle unità principali di pesi e misure antiche di Piemonte . . . . » 92
Conversione dei numeri complessi in frazioni dell'unità principale. . . » 94
Addizione dei numeri complessi. . . . . » 96
Sottrazione id. » 97
Moltiplicazione id. » 99
Divisione id. » 106
Conversione de'numeri complessi in decimali e viceversa . . . . » 111
Sistema metrico. . . . . » 113
Tabella indicativa dei nuovi pesi e misure più comunemente usati. . . » 119
Tabelle comparative delle misure antiche colle metriche. . . . . . . » 120
Tabella delle misure itinerarie moderne . . . . » 128

PARTE SECONDA

ELEMENTI D'ALGEBRA

Nozioni preliminari . . . . » 131
Addizione e riduzione dei termini simili . . . . » 134
Sottrazione algebrica . . . . » 137
Moltiplicazione . . . . » 139
Divisione . . . . » 147
Frazioni algebriche e loro operazioni. . . . . » 154
Potenze e radici di un numero . . . . » 157
Radici immaginarie . . . . » 159
Estrazione della radice quadrata . . . . » 161
Estrazione della radice cubica . . . . » 171
Equazioni algebriche -- uguaglianze. . . . . » 181
Equazioni di 1° grado ad una sola incognita. . . . . » 183

Equazioni di 1° grado a più incognite . . . . Pag. 189
Problemi di equazione di 1° grado. . . . . » 193
Equazioni di 2° grado . . . . » 197
Risoluzione dell'equazione generale $x^2+p.\ x=q$.. . . . . » 199
Ragioni e proporzioni . . . . » 208
Proporzioni aritmetiche od equi-differenze e loro proprietà. . . . . . » 209
Proporzioni geometriche e loro proprietà. . . . . » 211
Regola del tre semplice. » 220
Id. composta . . . . » 223
Id. d'interesse semplice. . . . . » 225
Id. di sconto . . . . » 228
Regola di società o di partizione . . . . » 230
Id. congiunta o di cambio. . . . . » 232
Id. d'alligazione . . . . » 233
Progressioni . . . . » 235
Progressioni per differenza. . . . . » 237
Progressioni per quoziente. . . . . » 242
Formazione delle potenze ed estrazione delle radici dei monomii algebrici . . . . » 246
Addizione e sottrazione dei radicali. . . . . » 256
Moltiplicazione e divisione dei radicali . . . . » 258
Logaritmi, definizioni e loro proprietà generali. . . . . » 263
Brevi cenni sulla formazione di tavole di logaritmi . . . . » 274
Sistema dei logaritmi ordinari e vantaggi che ne derivano . . . . . » 279
Computazione dei logaritmi di un sistema in un altro qualsiasi. . . . » 283
Complemento aritmetico di un logaritmo. . . . . » 284
Tavole di Callet, disposizioni dei numeri e dei logaritmi nelle medesime, e modo di servirsene . . . . » 286
Uso delle tavole di La Lande . . . . » 305
Applicazioni ed esempi di calcoli fatti coi logaritmi. . . . . » 312

G. Garibaldi

W l'Italia

Il sottoscritto dichiara d'aver

30 × 160 × 12

20 × 15 = 300

14400 : 300

160 × 30

4800 × 12

9600

48

14400

Pree

l'amico Vekica

13 — 25
x — 175

25 × 13

Dieci mille ottanta

175 × 13
525
175
2275

2275 : 13

6 — 54
9 — x

54 × 6
324 : 9
= 54 36

20 — 15 — 160
30 — 12 — x